2. FONKSİYONLAR

1. *Aşağıdaki kurallarla verilen fonksiyonların grafiklerini çiziniz.*

(**a**) $f(x) = 4\,|x|$ (**b**) $f(x) = -\,|x|$ (**c**) $f(x) = -4\,|x|$ (**ç**) $f(x) = |x-3|$

(**d**) $f(x) = -\,|x-3|$ (**e**) $f(x) = |3x-1|$ (**f**) $f(x) = -\,|3x-1|$

2. *Aşağıdaki kurallarla verilen fonksiyonların grafiklerini çiziniz.*

(**a**) $f(x) = |x| + 4$ (**b**) $f(x) = |x| - 4$ (**c**) $f(x) = 4 - |x|$

3. *Bilgisayar bellek çipleri üretip satan bir fabrikanın pazarlama bölümü, fiyat-talep ve gelir fonksiyonlarının*

$$\begin{aligned} p(x) &= 75 - 3x \\ R(x) &= x\,(75 - 3x) \end{aligned}$$

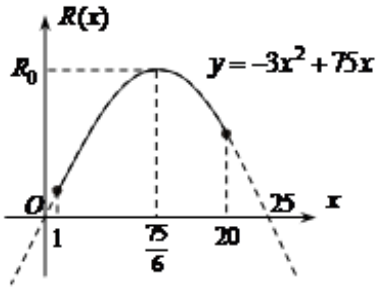
eşitlikleriyle verildiğini belirlemiştir. Burada x, milyon *olarak talep sayısını göstermektedir.* $R(x)$ *de* milyon dolar *olarak gelirdir. Bu fonksiyonların tanım aralığı* $1 \le x \le 20$ *eşitsizliğiyle verilmiştir.*

(**a**) *Gelir fonksiyonunun grafiğini çiziniz.*

(**b**) *Maksimum gelir elde edebilmek için gereken üretim sayısını bulunuz. Maksimum gelir nedir?*

(**c**) *Maksimum gelir elde edildiğinde her bir çipin fiyatı ne olur?*

Çözüm: (**a**)



(2-1.1. şekil)

(**b**) $\frac{75}{6}$ milyon adet üretildiğinde gelir en büyük olur. $\left(\frac{75000000}{6} = 12\,500\,000 \text{ adet.}\right)$

$R_0 = R(\frac{75}{6}) = \frac{75}{6}\left(75 - 3 \cdot \frac{75}{6}\right) = 468.75$ milyon dolar olur. (468750000 dolar)

(**c**) $p(\frac{75}{6}) = 75 - 3 \cdot \frac{75}{6} = 37,5$ dolar. □

4. *Bilgisayar bellek çipleri üretip satan bir fabrikanın pazarlama bölümü, gelir ve maliyet fonksiyonlarının*

$$\begin{aligned} R(x) &= x\,(75 - 3x) \\ C(x) &= 125 + 16x \end{aligned}$$

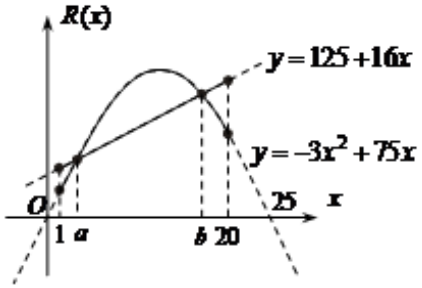
eşitliğiyle verildiğini belirlemiştir. Burada x, milyon *olarak talep sayısını göstermektedir.* $R(x)$ *de* milyon dolar *olarak gelirdir. Bu fonksiyonun tanım aralığı* $1 \leq x \leq 20$ *eşitsizliğiyle verilmiştir.*

(**a**) *Gelir ve maliyet fonksiyonlarının grafiğini aynı koordinat sisteminde çiziniz.*

(**b**) *Gelir ve maliyetin eşit olduğu başabaş noktasını bulunuz.*

(**c**) x *in hangi değerleri için kâr, hangi değerleri için zarar olur?*

Çözüm: (**a**)



(2-1.2. şekil)

(**b**) $x\,(75 - 3x) = 125 + 16x$ eşitliğinden $a = 2,415$ milyon çip ve $b = 17,251$ milyon çip bulunur.

(**c**) $2,415 < x < 17,251$ aralığında firma kâr eder.

$1 \leq x < 2,415$ ve $17,251 < x \leq 20$ aralıklarında firma zarar eder. □

5. *Aşağıda kuralları verilen fonksiyonların grafiklerini çiziniz.*

(a) $f(x) = 3^x$ **(b)** $f(x) = -3^x$ **(c)** $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ **(ç)** $f(x) = -\left(\frac{1}{3}\right)^x$

Çözüm: □

6. *Aşağıda kuralları verilen fonksiyonların grafiklerini çiziniz.*

(a) $f(x) = 3^x + 1$ **(b)** $f(x) = 3^{-x} - 1$ **(c)** $f(x) = -3^{-x} + 1$

Çözüm: □

7. *Aşağıda kuralları verilen fonksiyonların grafiklerini çiziniz.*

(a) $f(x) = 3^{x+1}$ **(b)** $f(x) = 3^{x-1}$ **(c)** $f(x) = -3^{x+1}$ **(ç)** $f(x) = -3^{x-1}$

8. *3500 TL para 4 ayda bir yenilenmek üzere yıllık %8 faiz oranıyla bankaya yatırılıyor. Bu para 6 yıl sonra ne kadar olur?*

Çözüm: $A = P\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt} = 3500\left(1 + \frac{0{,}08}{3}\right)^{3\cdot 6} \simeq 5620{,}8$ dir.

9. *Aşağıda kuralları verilen fonksiyonların grafiklerini çiziniz.*

(a) $f(x) = \log_3 x$ **(b)** $f(x) = -\log_3 x$ **(c)** $f(x) = 1 + \log_3 x$

(ç) $f(x) = -1 + \log_3 x$ **(d)** $f(x) = 1 - \log_3 x$

10. *Aşağıda kuralları verilen fonksiyonların grafiklerini çiziniz.*

(a) $f(x) = \log_3(x-1)$ **(b)** $f(x) = \log_3(x+1)$

(c) $f(x) = 1 + \log_3(x-1)$ **(ç)** $f(x) = -1 + \log_3(x-1)$

11. *Aşağıda verilen sayıları bulunuz.*

(a) $\log_2 128$ **(b)** $\log_4 1$ **(c)** $\log_3 243$

(ç) $\log_9 \sqrt[3]{9}$ **(d)** $\log_3 \sqrt[5]{81}$ **(e)** $\log_{\sqrt{2}} 32$

12. *Aşağıda verilen sayıları bulunuz.*

(a) $\log_3 64 \cdot \log_2 27$ **(b)** $\log_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} 8$

Çözüm: **(a)** $\log_3 64 \cdot \log_2 27 = \log_3\left(2^6\right) \cdot \log_2\left(3^3\right)$

$= (6\log_3 2) \cdot (3\log_2 3) = 18\,(\log_3 2) \cdot (\log_2 3) = 18\,(\log_3 3) = 18$

(b) $\log_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} 8 = \dfrac{\log_2 8}{\log_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \dfrac{\log_2\left(2^3\right)}{\log_2 1 - \log_2\left(\sqrt{2}\right)} = \dfrac{3\log_2 2}{0 - \log_2\left(2^{1/2}\right)} = \dfrac{3}{0 - \frac{1}{2}\log_2 2} = -6$ □

13. $\log_2 125 \cdot \log_5 9 \cdot \log_3\left(\frac{1}{16}\right)$ *sayısını hesaplayınız.*

Çözüm: $\log_2 125 \cdot \log_5 9 \cdot \log_3\left(\frac{1}{16}\right) = \log_2\left(5^3\right) \cdot \log_5\left(3^2\right) \cdot \log_3\left(2^{-4}\right)$

$$= 3\log_2 5 \cdot 2\log_5 3 \cdot (-4)\log_3 2 = -24\,(\log_2 5)\cdot(\log_5 3)\cdot(\log_3 2) = -24\log_2 2 = -24$$

□

14. $\log_a\left(\frac{1}{27}\right) = -\frac{3}{2}$ *ise* a *nedir?*

Çözüm: $\log_a\left(\frac{1}{27}\right) = \log_a\left(3^{-3}\right) = (-3)\log_a 3$ olduğundan $\log_a\left(\frac{1}{16}\right) = -\frac{3}{2}$ eşitliği,

$$-3\log_a 3 = -\frac{3}{2}$$

eşitliğine denktir. Buradan $\log_a 3 = \frac{1}{2}$ elde edilir. Buradan da $3 = a^{1/2}$ bulunur. $3 = a^{1/2}$ eşitliğinin her iki yanının karesi alınarak $3^2 = a$ elde edilir. Buna göre $a = 9$ dur. □

15. *P lira para yıllık* %10 *faizle bankaya yatırıldığında kaç yıl sonra beş katına çıkar?*

Çözüm: Bileşik faiz formülüne göre

$$5P = P\left(1 + \tfrac{10}{100}\right)^t$$

olur. Bu eşitliği sağlayan t sayısını arıyoruz demektir. Buradan

$$\begin{aligned} 5 &= (1,1)^t \\ \ln 5 &= t\ln(1,1) \\ t &= \tfrac{\ln 5}{\ln(1,1)} \approx 17 \text{ yıl} \end{aligned}$$

olur. □

16. *Trigonometri çemberinden yararlanarak* $\cos(x+\pi) = -\cos x$ *ve* $\sin(x+\pi) = -\sin x$ *olduğunu gösteriniz.*

17. *Trigonometri çemberinden yararlanarak* $\cos(x+\frac{\pi}{2}) = \sin x$ *ve* $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x$ *olduğunu gösteriniz.*

18. *Radyan olarak ölçüleri* $\pi+\frac{\pi}{6}$, $\pi-\frac{\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{6}$ *olan açıların kosinüs ve sinüslerini,* $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *ve* $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ *olduğundan yararlanarak ve trigonometri çemberini kullanarak geometrik olarak bulunuz.*

19. *Aşağıda verilen sayıları bulunuz.*

(a) $\cos(-90^o)$ **(b)** $\sin(-270^o)$ **(c)** $\sin(540^o)$ **(d)** $\cos(135^o)$

20. *Aşağıda verilen sayıları bulunuz.*

(a) $\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$ **(b)** $\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$ **(c)** $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ **(d)** $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

21. *Aşağıda kuralları verilen fonksiyonların grafiklerini çiziniz.*

(a) $f(x) = \cos 2x$ **(b)** $f(x) = \sin 2x$ **(c)** $f(x) = -\cos 2x$ **(ç)** $f(x) = -\sin 2x$

3. LİMİT VE SÜREKLİLİK

1. *Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.*

(a) $\lim\limits_{x\to(-1)^-} x^2$ **(b)** $\lim\limits_{x\to5^-} x$ **(c)** $\lim\limits_{x\to2^-} 8$ **(d)** $\lim\limits_{x\to4^-} |x|$

(e) $\lim\limits_{x\to5^+} x$ **f)** $\lim\limits_{x\to1^+} x^3$ **(g)** $\lim\limits_{x\to0^+} (|x|-1)$ **(h)** $\lim\limits_{x\to4^+} |x|$

2. *Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.*

(a) $\lim\limits_{x\to(-1)^-} |x+1|$ **(b)** $\lim\limits_{x\to3^-} |x-3|$ **(c)** $\lim\limits_{x\to6^-} |x-6|$ **(d)** $\lim\limits_{x\to(-2)^-} |x+2|$

(e) $\lim\limits_{x\to(-7)^+} |x+7|$ **(f)** $\lim\limits_{x\to2^+} |x-2|$ **(g)** $\lim\limits_{x\to(-3)^+} |x+3|$ **(h)** $\lim\limits_{x\to5^+} |x-5|$

3. *Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.*

(a) $\lim\limits_{x\to(-1)} |x+1|$ **(b)** $\lim\limits_{x\to3} |x-3|$ **(c)** $\lim\limits_{x\to6} |x-6|$ **(d)** $\lim\limits_{x\to(-2)} |x+2|$

(e) $\lim\limits_{x\to(-7)} |x+7|$ **(f)** $\lim\limits_{x\to2} |x-2|$ **(g)** $\lim\limits_{x\to(-3)} |x+3|$ **(h)** $\lim\limits_{x\to5} |x-5|$

4. $\lim\limits_{x\to3} \left(3x^2-5x+2\right)$ *limiti varsa bulunuz.*

5. $\lim\limits_{x\to1} \sqrt{4x^2-x+1}$ *limiti varsa bulunuz.*

6. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin 4x}{5x}$ *limiti varsa bulunuz.*

Çözüm: $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin 4x}{5x} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{4}{5}\dfrac{\sin 4x}{4x} = \dfrac{4}{5}\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin 4x}{4x} = \dfrac{4}{5}.$ □

7. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{2x}{\sin 7x}$ *limiti varsa bulunuz.*

Çözüm: $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{2x}{\sin 7x} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{2}{7}\dfrac{7x}{\sin 7x} = \dfrac{2}{7}\lim\limits_{x\to0} \dfrac{7x}{\sin 7x} = \dfrac{2}{7}.$ □

8. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\tan 3x}{8x}$ *limiti varsa bulunuz.*

Çözüm: $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\tan 3x}{8x} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{3}{8}\dfrac{\tan 3x}{3x} = \dfrac{3}{8}\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\tan 3x}{3x} = \dfrac{3}{8}.$ □

9. $\lim\limits_{x\to(-3)} \dfrac{x^2-9}{x+3}$ *limiti varsa bulunuz.*

Çözüm: $\lim\limits_{x\to(-3)} \dfrac{x^2-9}{x+3} = \lim\limits_{x\to(-3)} \dfrac{(x-3)(x+3)}{x+3} = \lim\limits_{x\to(-3)} (x-3) = -6.$ □

10. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x-1}$ *limiti varsa bulunuz.*

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)(x+2)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} (x+2) = 3.$ □

11. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{x^2-4x+3}$ *limiti varsa bulunuz.*

12. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$ *limiti varsa bulunuz.*

13. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{|x-1|}$ *limiti varsa bulunuz.*

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x-1}{|x-1|} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x-1}{-(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1^-} (-1) = -1,$

$\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-1}{|x-1|} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-1}{(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1^+} (1) = 1$

dir. 2 noktasındaki sağdan ve soldan limitler farklı olduğundan bu örnekte verilen fonksiyonun bu noktada limiti yoktur. □

14. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2|x-2|}{x-2}$ *limiti varsa bulunuz.*

Çözüm: $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2|x-2|}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2(-(x-2))}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \left(-x^2\right) = -4,$

$\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2|x-2|}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \left(x^2\right) = 4$

dir. 2 noktasındaki sağdan ve soldan limitler farklı olduğundan bu örnekte verilen fonksiyonun bu noktada limiti yoktur. □

15. $\lim\limits_{x\to(-1)} \dfrac{x\,|x+1|}{x+1}$ *limiti varsa bulunuz.*

16. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\left|x^2-4\right|}{x-2}$ *limiti varsa bulunuz.*

Çözüm:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{\left|x^2-4\right|}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-\left(x^2-4\right)}{x-2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-(x-2)(x+2)}{x-2} = -\lim_{x\to 2^-} (x+2) = -4,$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{\left|x^2-4\right|}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\left(x^2-4\right)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^+} (x+2) = 4,$$

dir. 2 noktasındaki sağdan ve soldan limitler farklı olduğundan bu örnekte verilen fonksi-yonun bu noktada limiti yoktur. □

17. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{|x-2|}$ *limiti varsa bulunuz.*

18. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{5+h}-\sqrt{5}}{h}$ *limiti varsa bulunuz.*

Çözüm: $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{5+h}-\sqrt{5}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\left(\sqrt{5+h}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5+h}+\sqrt{5}\right)}{h\left(\sqrt{5+h}+\sqrt{5}\right)}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(5+h-5)}{h\left(\sqrt{5+h}+\sqrt{5}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{5+h}+\sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}.\ \square$$

19. $x \in \mathbb{R}$ *için*

$$f(x) = \begin{cases} -x^2-2x, & x < -1 \text{ ise} \\ -x, & -1 < x \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan f fonksiyonu veriliyor.

(a) *f fonksiyonunun $x_0 = 0$ noktasında limiti varsa bulunuz.*

(b) *f fonksiyonunun $x_0 = -1$ noktasında limiti varsa bulunuz.*

(c) *f fonksiyonunun $x_0 = -2$ noktasında limiti varsa bulunuz.*

Çözüm:

(a) $x_0 = 0$ için x_0 noktasının komşuluğunda $f(x) = -x$ olduğu göz önünde bulundurularak

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (-x) = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$$

elde edilir. Sağdan ve soldan limitler eşit olduğundan bu fonksiyonun x_0 noktasında limiti 0 dır.

(b) $$\lim_{x\to (-1)^-} f(x) = \lim_{x\to (-1)^-} \left(-x^2 - 2x\right) = -(-1)^2 - 2(-1) = 1,$$

$$\lim_{x\to (-1)^+} f(x) = \lim_{x\to (-1)^+} (-x) = -(-1) = 1,$$

dir. Sağdan ve soldan limitler eşit olduğundan bu fonksiyonun -1 noktasında limiti vardır ve 1 sayısına eşittir.

(c) $x_0 = -2$ için x_0 noktasının komşuluğunda $f(x) = -x^2 - 2x$ olduğu göz önünde bulundurularak

$$\lim_{x\to (-2)^-} f(x) = \lim_{x\to (-2)^-} \left(-x^2 - 2x\right) = -(-2)^2 - 2(-2) = 0$$

$$\lim_{x\to (-2)^+} f(x) = \lim_{x\to (-2)^+} \left(-x^2 - 2x\right) = -(-2)^2 - 2(-2) = 0$$

elde edilir. Sağdan ve soldan limitler eşit olduğundan bu fonksiyonun -2 noktasında limiti vardır ve 0 sayısıdır. □

20. *$x \in \mathbb{R}$ için*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 2 \text{ ise} \\ x - 1, & 2 < x \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan f fonksiyonu veriliyor.

(a) *f fonksiyonunun $x_0 = 0$ noktasında limiti varsa bulunuz.*

(b) *f fonksiyonunun $x_0 = 2$ noktasında limiti varsa bulunuz.*

(c) *f fonksiyonunun $x_0 = 3$ noktasında limiti varsa bulunuz.*

21. *Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.*

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{4x^3 + 3x^2 - 1}$ **(b)** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - 3x + 2}{4x^3 + 3x^2 - 1}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2 - x + 3}{2x^2 + 7x}$ **(d)** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2 - x + 3}{2x^2 + 7x}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3 - 3x + 1}{5x^2 + x - 4}$ **(f)** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3 - 3x + 1}{5x^2 + x - 4}$

Çözüm: (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-3x+2}{4x^3+3x^2-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x^3\left(4+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x\left(4+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}\right)}$

$$= \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\right) \cdot \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{4+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}}\right) = 0 \cdot \frac{1}{4} = 0.$$

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2-3x+2}{4x^3+3x^2-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x^3\left(4+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}\right)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x\left(4+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}\right)}$

$$= \left(\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}\right) \cdot \left(\lim_{x\to-\infty} \frac{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{4+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}}\right) = 0 \cdot \frac{1}{4} = 0.$$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^2-x+3}{2x^2+7x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2\left(4-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(2+\frac{7}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}{2+\frac{7}{x}} = \dfrac{4-0+0}{2+0} = 2.$

(d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x^2-x+3}{2x^2+7x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2\left(4-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(2+\frac{7}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}{2+\frac{7}{x}} = \dfrac{4-0+0}{2+0} = 2.$

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3-3x+1}{5x^2+x-4} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3\left(2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(5+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\left(2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{5+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}$

$$= \left(\lim_{x\to+\infty} x\right) \cdot \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{5+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}\right) = (+\infty) \cdot \frac{2}{5} = +\infty.$$

(f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^3-3x+1}{5x^2+x-4} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3\left(2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(5+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x\left(2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{5+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}$

$$= \left(\lim_{x\to-\infty} x\right) \cdot \left(\lim_{x\to-\infty} \frac{2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{5+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}\right) = (-\infty) \cdot \frac{2}{5} = -\infty. \ \square$$

22. *Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.*

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{\sqrt{9x^2+2}}$ **(b)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-1}{\sqrt{9x^2+2}}$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x-7}{\sqrt{x^2+4x+5}}$ **(d)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x-7}{\sqrt{x^2+4x+5}}$

Çözüm: (a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{\sqrt{9x^2+2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(9+\frac{2}{x^2}\right)}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2}\sqrt{9+\frac{2}{x^2}}}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{9+\frac{2}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{9+\frac{2}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}} = \frac{1-0}{\sqrt{9+0}} = \frac{1}{3}.$$

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-1}{\sqrt{9x^2+2}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(9+\frac{2}{x^2}\right)}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2}\sqrt{9+\frac{2}{x^2}}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{9+\frac{2}{x^2}}}$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{(-x)\sqrt{9+\frac{2}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)}{(-1)\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}} = (-1)\frac{1-0}{\sqrt{9+0}} = -\frac{1}{3}.$$

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x-7}{\sqrt{x^2+4x+5}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\left(3-\frac{7}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\left(3-\frac{7}{x}\right)}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(3-\frac{7}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(3-\frac{7}{x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3-\frac{7}{x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}} = \frac{3-0}{\sqrt{1+0+0}} = 3.$$

(d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x-7}{\sqrt{x^2+4x+5}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x\left(3-\frac{7}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x\left(3-\frac{7}{x}\right)}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}}$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(3-\frac{7}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(3-\frac{7}{x}\right)}{(-x)\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}}$$

$$= (-1)\lim_{x\to-\infty} \frac{3-\frac{7}{x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}} = (-1)\frac{3-0}{\sqrt{1+0+0}} = -3. \ \square$$

23. $\lim\limits_{x\to(-2)} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}$ *limiti varsa bulunuz.*

Çözüm: $\lim\limits_{x\to(-2)^-} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to(-1)^-} \dfrac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)} = \lim\limits_{x\to(-2)^-} \dfrac{x+3}{x+2} = -\infty,$

$$\lim_{x\to(-2)^+} \frac{x^2+x-6}{x^2-4} = \lim_{x\to(-2)^+} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to(-2)^+} \frac{x+3}{x+2} = +\infty$$

dir. -2 noktasındaki sağdan ve soldan limitler farklı olduğundan bu örnekte verilen fonksiyonun bu noktada limiti yoktur. □

24. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3|x|}{2x+5}$ *ve* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3|x|}{2x+5}$ *limitleri varsa bulunuz.*

Çözüm: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3|x|}{2x+5} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3(-x)}{2x+5} = -\dfrac{3}{2},$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3|x|}{2x+5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{2x+5} = \frac{3}{2}$$

dir. □

25. $x \in \mathbb{R}$ *için*

$$f(x) = \begin{cases} x - \frac{|x-1|}{x-1}, & x \neq 1 \text{ ise} \\ 0, & x = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan f fonksiyonu veriliyor.

(a) *f fonksiyonu $x_0 = 1$ noktasında sürekli midir?*

(b) *f fonksiyonu $x_0 = 1$ noktasında sağdan sürekli midir?*

(c) *f fonksiyonu $x_0 = 1$ noktasında soldan sürekli midir?*

26. $x \in \mathbb{R}$ *için*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & x \neq 1 \text{ ise} \\ 0, & x = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan f fonksiyonu veriliyor.

(a) *f fonksiyonu $x_0 = 1$ noktasında sürekli midir?*

(b) *f fonksiyonu $x_0 = 0$ noktasında sürekli midir?*

27. $x \in \mathbb{R}$ *için*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 1 \text{ ise} \\ -x^2 + 1, & x > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan f fonksiyonu $x_0 = 1$ noktasında sürekli midir?

28. *$x \in \mathbb{R}$ için*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \text{ ise} \\ 2, & x = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan f fonksiyonu $x_0 = 2$ noktasında sürekli midir?

29. *Aşağıda kuralları verilen fonksiyonların sürekli olduğu kümeleri belirtiniz.*

(a) $f(x) = 5x^2 + 3$ **(b)** $f(x) = \dfrac{3x^2 - 1}{(x-1)(x+2)}$ **(c)** $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$

(d) $f(x) = \sqrt[3]{2x - 51}$ **(e)** $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ **(f)** $f(x) = \sqrt[6]{x^2 + 3}$

30. *$x \in \mathbb{R} - \{2\}$ için $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$ kuralıyla tanımlanan f fonksiyonunun $x_0 = 2$ noktasındaki sürekliliğini inceleyiniz.*

Çözüm: Verilen fonksiyon $x_0 = 2$ için tanımlı olmadığından bu noktada sürekli değildir. Öte yandan

$$\lim_{h \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{h \to 2} \frac{(x-2)(x+3)}{x-2} = \lim_{h \to 2} (x + 3) = 5$$

dır. f fonksiyonunun tanım kümesi genişletilerek $f(2) = 5$ olarak tanımlanırsa bu fonksiyon $x_0 = 2$ için sürekli olur. Bundan dolayı f fonksiyonunun 2 noktasındaki süreksizliği kaldırılabilir süreksizliktir. □

4. TÜREV

Türev Kavramı

1. *$x \in \mathbb{R}$ için*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 1 \text{ ise} \\ -x^2 + 1, & x > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan f fonksiyonu $x_0 = 2$ noktasında türevli midir?

2. *$f(x) = |x|$ olduğuna göre bu fonksiyonun 0 noktasında türevinin bulunmadığını gösteriniz.*

Türev Alma Kuralları

3. *Aşağıdaki kuralları verilen f fonksiyonları için f' fonksiyonunun kuralını bulunuz.*

(a) $f(x) = 2 - 4x + 3x^2$ **(b)** $f(x) = x\,(x-5)^2$ **(c)** $f(x) = \left(x^3 + 1\right)^5$

4. *Aşağıdaki kuralları $y = f(x)$ biçiminde verilen f fonksiyonları için y' yü bulunuz.*

(a) $f(x) = \left(2x - \frac{1}{3}\right)^4$ **(b)** $f(x) = x^2\left(3x + \frac{1}{2}\right)^3$

5. *$y^3x + x^2\,(y-1) = 0$ eşitliğiyle belirlenen $f : x \to y$ fonksiyonunun türev fonksiyonunu belirtiniz.*

6. *$f(x) = |x|$ olduğuna göre $x \neq 0$ için $f'(x) = \dfrac{|x|}{x}$ olduğunu gösteriniz.*

7. *$f(x) = \left|x^2 - 4\right|$ olduğuna göre $f'(x)$ ne olur?*

Çözüm: $u = |x|$ ise $u' = \dfrac{|x|}{x}$ olduğundan $f'(x) = \dfrac{\left|x^2-4\right|}{x^2-4} \cdot (2x)$ olur. □

8. *Aşağıdaki kurallarla verilen fonksiyonların türevlerini hesaplayınız.*

(a) $f(x) = 7$ **(b)** $f(x) = -2x - 5$ **(c)** $f(x) = 1 - 4x^2$

(ç) $f(x) = 3x^4 - x + 5$ **(d)** $f(x) = \left(x^3 - 3x^2 - 1\right)^9$ **(e)** $f(x) = x^3\,(2-x)^5$

(f) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$ **(g)** $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 6}{x-1}$ **(h)** $f(x) = \dfrac{-x}{\left(x^2+1\right)^2}$

9. *$f(x) = x^3 + 4x - 3$ fonksiyonunun grafiğinin, $x = 1$ için elde edilen noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz.*

Çözüm: $x = 1$ için $f(1) = 2$ olduğundan $(1, 2)$ noktasındaki teğetin denklemini bulacağız.

$$f'(x) = 3x^2 + 4$$

olduğundan $f'(1) = 7$ dir. Buna göre söz konusu noktadaki teğetin eğimi 7 tir. $(1, 2)$ noktasından geçen ve eğimi 7 olan doğrunun denklemi

$$y - 2 = 7(x - 1)$$

dir. Bu denklem düzenlenerek $y - 7x + 5 = 0$ denklemi elde edilir. □

Diferensiyel Kavramı

10. *$\sqrt{4,1}$ sayısını yaklaşık olarak hesaplayınız.*

Çözüm: $f(x) = \sqrt{x}$ alalım. $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ tir. $x_0 = 4$, $x = 4,1$ diyelim.

$$f(x) = f(4,1) \approx f(4) + (0,1) \cdot f'(4) = 2 + (0,1) \cdot \tfrac{1}{4} = 2,025$$

olur. □

11. *Takım elbise üreten bir firmanın x adet satıştan elde ettiği gelir*

$$R(x) = 60x - 0,025x^2, \qquad 0 \leq x \leq 2000$$

eşitliğiyle verilmiştir.

(**a**) *Üretim sayısı 900 adetten 1000 adete çıkarılırsa gelirdeki ortalama artış nedir?*

(**b**) *Marjinal (anlık) gelir fonksiyonunu bulunuz.*

(**c**) *Üretim sayısı 900 adet iken gelirdeki ani değişim hızı nedir? Üretim sayısı 960 adet iken gelirdeki ani değişim hızı nedir?*

Çözüm: (**a**) Üretim sayısı 900 adetten 1000 adete çıkarılırsa gelirdeki artış

$$R(1000) - R(900)$$

dür.

$$R(950) - R(900) = \left(60 \cdot 1000 - 0,025\,(1000)^2\right) - \left(60 \cdot 900 - 0,025\,(900)^2\right) = 1250\ (lira)$$

olur. Gelirdeki ortalama artış $\frac{R(1000)-R(900)}{1000-900}$ dır.

$$\frac{R(1000) - R(900)}{1000 - 900} = \frac{1250}{100} = 12,5\ (lira)$$

bulunur. Bu demektir ki, üretim 900 ile 1000 arasında iken üretim sayısı 1 arttırıldığında gelir $12,5$ *lira* artar.

(**b**) $R'(x) = 60 - 0,05x$ tir. $R'(x)$, üretim sayısı x iken üretim arttırılmaya başladığında gelirdeki ani değişim hızını gösterir.

(**c**) $$R'(900) = 60 - 0,05 \cdot 900 = 15 \ (lira)$$

ve

$$R'(960) = 60 - 0,05 \cdot 960 = 12 \ (lira)$$

dır.

Bu sorunun (a) kısmında bulunan sonuç ile (c) kısmında bulunan sonuçları karşılaştırınız. □

12. *Haftada x adet oyuncak bebek üreten bir firmanın maliyet ve gelir fonksiyonları*

$$C(x) = 5000 + 2x, \quad R(x) = 12x - \frac{x^2}{800}, \qquad 0 \le x \le 9000$$

eşitlikleriyle verilmiştir. Haftalık üretim 2000 *adet iken* 2010 *adete çıkarılırsa gelir ve kârdaki yaklaşık artışı diferensiyel kavramından yararlanarak bulunuz.*

Çözüm: $dx = 2000 - 2010 = 10$ dur. $dR(x) = R'(x)dx = \left(12 - \dfrac{x}{400}\right) dx$ olduğundan

$$dR(2000) = \left(12 - \frac{2000}{400}\right) \cdot 10 = 70 \ (lira)$$

olur. Demek ki haftalık üretim 2000 adet olduğu anda üretim 2010 adete çıkarılırdığında gelirdeki yaklaşık artış, 70 *lira* dır.

$$P(x) = R(x) - C(x) = (12x - \frac{x^2}{800}) - (5000 + 2x) = 10x - \frac{x^2}{800} - 5000$$

olduğundan $dP(x) = P'(x)dx = \left(10 - \dfrac{x}{400}\right) dx$ olur. Buna göre

$$dP(2000) = \left(10 - \frac{2000}{400}\right) \cdot 10 = 50 \ (lira)$$

olur. Demek ki haftalık üretim 2000 adet olduğu anda üretim 2010 adete çıkarılırdığında kârdaki yaklaşık artış, 50 *lira* dır. □

Bazı Özel Fonksiyonların Türevleri

13. $f(x) = \ln|x + \sin x|$ *olduğuna göre* $f'(x)$ *ne olur?*

Çözüm: $u = |x|$ ise $u' = \dfrac{|x|}{x}$ olduğundan

$$f'(x) \;=\; \frac{1}{|x+\sin x|} \cdot \frac{|x+\sin x|}{x+\sin x} \cdot (1+\cos x) \;=\; \frac{1+\cos x}{x+\sin x}$$

olur. □

14. *Aşağıdaki türevleri hesaplayınız.*

(a) $\dfrac{d}{dx}\left(x^{\frac{7}{2}}\right)$ **(b)** $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt[5]{x^3}\right)$ **(c)** $\dfrac{d}{dx}\left(x^{-8}\right)$

(ç) $\dfrac{d}{dx}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)$ **(d)** $\dfrac{d}{dx}\left(2x^5 - 7x + 1\right)$ **(e)** $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x} + 3x^2\right)$

(f) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{x^3} - x^2 + \dfrac{2}{x^5}\right)$ **(g)** $\dfrac{d}{du}\left(u^3 - \sqrt[5]{u}\right)$ **(h)** $\dfrac{d}{dt}\left(t^3 - \frac{1}{2}\sqrt{1+t^2}\right)$

15. *Aşağıdaki türevleri hesaplayınız.*

(a) $\dfrac{d}{dx}\ln\left(1-e^x\right)$ **(b)** $\dfrac{d}{dx}\ln\left(2x + e^{(x^2)}\right)$ **(c)** $\dfrac{d}{dx}\cos\left(e^{-x}\right)$

(ç) $\dfrac{d}{dx}\left(3^x \cdot e^x\right)$ **(d)** $\dfrac{d}{dx}\left(e^{\sqrt{\sin x}}\right)$ **(e)** $\dfrac{d}{dx}\left(\arcsin e^x\right)$

16. *Aşağıdaki kurallarla verilen fonksiyonların türevlerini hesaplayınız.*

(a) $f(x) = \ln\left(4+x^2\right)$ **(b)** $f(x) = \ln\left(\ln x\right)$ **(c)** $f(x) = \ln\ln\ln x$

(ç) $f(x) = \left(\ln x\right)^5$ **(d)** $f(x) = \arcsin\left(\ln x\right)$ **(e)** $f(x) = \ln\left(\arcsin x\right)$

(f) $f(x) = \ln\left(\cos x\right)$ **(g)** $f(x) = \cos\left(\ln x\right)$ **(h)** $f(x) = \sin\ln\ln x$

17. *Aşağıdaki kurallarla verilen fonksiyonların türevlerini hesaplayınız.*

(a) $f(x) = x^2\cos\left(x^2+1\right)$ **(b)** $f(x) = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$

(c) $f(x) = \frac{1-\sin x}{1+\cos x}$ **(ç)** $f(x) = \dfrac{\cos 2x}{\sin^2 2x}$

(d) $f(x) = \sin^2\left(\cos x\right)$ **(e)** $f(x) = \sin\left(x\sqrt{1+x^2}\right)$

(f) $f(x) = \cos^2\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ **(g)** $f(x) = \sqrt{\left(\dfrac{\sin x}{1+\sin x}\right)}$

18. $y = \dfrac{3}{\ln x}$ *olduğuna göre* y'' *ne olur?*

19. *Aşağıdaki kurallarla verilen fonksiyonların ikinci türevlerini hesaplayınız.*

(a) $f(x) = e^{\cos x}$ **(b)** $f(x) = xe^x$

20. *$f(x) = (x-1)^x$ olduğuna göre $f'(x)$ ne olur?*

Çözüm: $y = (x-1)^x$ diyelim.

$$\begin{aligned}
\ln y &= \ln x \cdot \ln(x-1) \\
\tfrac{1}{y}y' &= \tfrac{1}{x} \cdot \ln(x-1) + (\ln x) \cdot \tfrac{1}{x-1} \\
\tfrac{1}{y}y' &= \tfrac{\ln(x-1)}{x} + \tfrac{\ln x}{x-1} \\
y' &= (x-1)^x \left[\tfrac{\ln(x-1)}{x} + \tfrac{\ln x}{x-1}\right]
\end{aligned}$$

olur. □

21. *$f(x) = \left(x^2 + \sin x\right)^{\ln x}$ olduğuna göre $f'(x)$ ne olur?*

Çözüm: $y = \left(x^2 + \sin x\right)^{\ln x}$ diyelim.

$$\begin{aligned}
\ln y &= \ln x \cdot \ln\left(x^2 + \sin x\right) \\
\tfrac{1}{y}y' &= \tfrac{1}{x} \cdot \ln\left(x^2 + \sin x\right) + (\ln x) \cdot \tfrac{1}{(x^2+\sin x)}(2x + \cos x) \\
\tfrac{1}{y}y' &= \tfrac{\ln\left(x^2+\sin x\right)}{x} + \tfrac{(\ln x)(2x+\cos x)}{(x^2+\sin x)} \\
y' &= \left(x^2 + \sin x\right)^{\ln x} \left[\tfrac{\ln\left(x^2+\sin x\right)}{x} + \tfrac{(\ln x)(2x+\cos x)}{(x^2+\sin x)}\right]
\end{aligned}$$

olur. □

22. *$f(x) = x^{\tan x}$ olduğuna göre $f'(x)$ ne olur?*

Çözüm: $y = x^{\tan x}$ diyelim.

$$\begin{aligned}
\ln y &= \tan x \cdot \ln x \\
\tfrac{1}{y}y' &= \left(1 + \tan^2 x\right)\ln x + \tan x \cdot \tfrac{1}{x} \\
y' &= x^{\tan x}\left[\left(1 + \tan^2 x\right)\ln x + \tfrac{\tan x}{x}\right]
\end{aligned}$$

olur. □

23. *Aşağıdaki kurallarla verilen fonksiyonların türevlerini hesaplayınız.*

(a) $y = x^{\left(x^3\right)}$ **(b)** $y = \left(x^2+4\right)^x$ **(c)** $y = \left(x^2+1\right)^{\sqrt{\ln x}}$

(ç) $y = (\sin x)^{\cos x}$ **(d)** $y = \sin\left(x^{\sqrt{x}}\right)$ **(e)** $y = (\cos x)^{\ln x}$

Sürekli Bileşik Faiz

24. 200 TL, *yıllık* %7 *sürekli bileşik faiz ile bankaya yatırılıyor. Bu para,* 4 *yıl sonra kaç liraya ulaşır?*

Çözüm: $A = Pe^{rt} = 200 \cdot e^{(0,07)\cdot 4} = 200 \cdot e^{0,28} \approx 264,63\ TL$ olur. □

25. 2000 TL para, *yıllık* %5 *sürekli bileşik faiz ile bankaya yatırılıyor. Bu para, kaç yıl sonra* 6000 *lira olur?*

Çözüm: $6000 = 2000 \cdot e^{(0,05)t}$ eşitliğini sağlayan t sayısını arıyoruz. Bu eşitlikten önce $e^{(0,05)t} = 3$ bulunur. Bu eşitliğin her iki yanının doğal logaritması alınarak $(0,05)\,t = \ln 3$ ve buradan $t = \frac{\ln 3}{0,05} \approx 22$ *yıl* bulunur. □

26. P *lira* para, *yıllık* %8 *sürekli bileşik faiz ile bankaya yatırılıyor. Bu para, kaç yıl sonra ikiye katlanır?*

Çözüm: $2P = P\cdot e^{(0,08)t}$ eşitliğini sağlayan t sayısını arıyoruz. Bu eşitlikten önce $e^{(0,08)t} = 2$ bulunur. Bu eşitliğin her iki yanının doğal logaritması alınarak $(0,08)\,t = \ln 2$ ve buradan $t = \frac{\ln 2}{0,08} \approx 8,7$ *yıl* bulunur. □

6 – 6. BELİRLİ İNTEGRAL

1. $\int_{-2}^{3} \left(x^2\right) dx$ *belirli integralini hesaplayınız.*

Çözüm: (a) $\int_{-2}^{3} \left(x^2\right) dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^{3} = 9 - (-\frac{8}{3}) = \frac{35}{3}$ □

2. $\int_{0}^{3} \left(3x^2 - 2x - 1\right) dx$ *belirli integralini hesaplayınız.*

Çözüm: $\int_{0}^{3} \left(3x^2 - 2x - 1\right) dx = \left[x^3 - x^2 - x\right]_{0}^{3} = (27 - 9 - 3) - 0 = 15$ □

3. $\int_{1}^{9} 3\sqrt{x}dx$ *belirli integralini hesaplayınız.*

Çözüm: $\int_{1}^{9} 3\sqrt{x}dx = \left[2x^{\frac{3}{2}}\right]_{1}^{9} = 2\left(9^{\frac{3}{2}} - 1\right) = 54 - 2 = 52$ □

4. $\int_{0}^{2\pi} \left(\sin^2 x\right) dx$ *belirli integralini hesaplayınız.*

Çözüm: $\int_{0}^{2\pi} \left(\sin^2 x\right) dx = \int_{0}^{2\pi} \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_{0}^{2\pi} = \pi$ □

5. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{2x+1}$ *belirli integralini hesaplayınız.*

Çözüm: $\int_{0}^{1} \frac{dx}{2x+1} = \frac{1}{2}\left[\ln|2x+1|\right]_{0}^{1} = \frac{1}{2}\left(\ln 3 - \ln 1\right) = \frac{1}{2}\ln 3$ □

6. $\int_{1}^{9} \frac{1-\sqrt{x}}{x}dx$ *belirli integralini hesaplayınız.*

Çözüm:

$$\int_{1}^{9} \frac{1-\sqrt{x}}{x}dx = \int_{1}^{9} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx = \left[\ln|x| - 2\sqrt{x}\right]_{1}^{9} = (\ln 9 - 6) - (\ln 1 - 2) = 2\ln 3 - 4$$ □

7. $\int_{0}^{2} \left(x\sqrt{4-x^2}\,\right) dx$ *belirli integralini hesaplayınız.*

Çözüm: $\int \left(x\sqrt{4-x^2}\,\right) dx$ integralinde, $4 - x^2 = t^2$ diyelim. $-2xdx = 2tdt$ olur. Buna

göre

$$\int \left(x\sqrt{4-x^2}\,\right)dx = -\int \left(t^2\right)dt = -\tfrac{1}{3}t^3 = -\tfrac{1}{3}\left(\sqrt{4-x^2}\right)^3 + c$$

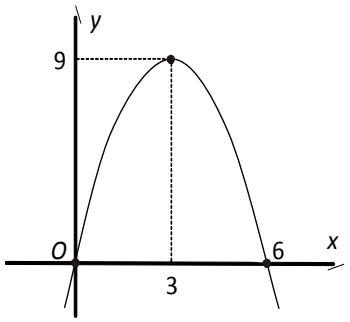
elde edilir.

$$\int_0^2 \left(x\sqrt{4-x^2}\,\right)dx = -\tfrac{1}{3}\left[\left(\sqrt{4-x^2}\right)^3\right]_0^2 = -\tfrac{1}{3}\left(\left(\sqrt{4-4}\right)^3 - \left(\sqrt{4}\right)^3\right) = \tfrac{8}{3}$$

tür. □

8. *$y = -x^2 + 6x$ eğrisi ile Ox ekseninin çevrelediği bölgenin alanını bulunuz.*

Çözüm: $y = -x^2 + 6x$ eğrisi ile Ox ekseninin çevrelediği bölge, $6-6.1.$ şekilde gölgeli olarak gösterilmiş bölgedir. Bu bölgenin alanı A olsun.



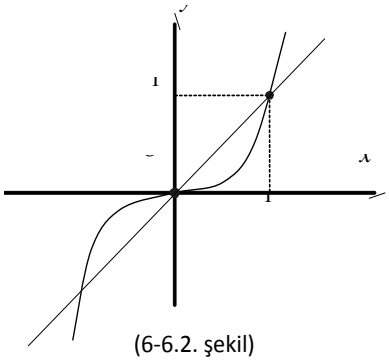
(6-6.1. şekil)

$$\begin{aligned} A &= \int_0^6 \left(-x^2 + 6x\right)dx \\ &= \left[-\tfrac{1}{3}x^3 + 6\cdot\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^6 \\ &= \left(-\tfrac{1}{3}6^3 + 6\cdot\tfrac{1}{2}6^2\right) - 0 \\ &= 36 \end{aligned}$$

dir. □

9. *Düzlemin birinci bölgesinde, $y = x^3$ eğrisi ile $x = y$ doğrusunun sınırladığı bölgenin alanını bulunuz.*

Çözüm: Verilen bölge, $6-6.2.$ şekilde gölgeli olarak gösterilmiş bölgedir. Bu bölgenin alanı A olsun.



(6-6.2. şekil)

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \left(x - x^3\right)dx \\ &= \left[\tfrac{x^2}{2} - \tfrac{x^4}{4}\right]_0^1 \\ &= \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\right) - 0 \\ &= \tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

dir. □

10. *Bir şirketin ayda x adet televizyon üretimine karşılık aylık marjinal kârı*

$$P'(x) = 150 - (0,1)\,x, \qquad 0 \le x \le 3000$$

eşitliğiyle verilmiştir. Bu şirket şu anda ayda 1000 *adet üretim yapmaktadır. Üretimini ayda* 1200 *adet olacak biçimde arttırırsa aylık kârındaki değişim ne olur?*

Çözüm:

$$\begin{aligned} P(1200) - P(1000) &= \int_{1000}^{1200} (150 - 0,1x)\,dx = \left[150x - (0,05)\,x^2\right]_{1000}^{1200} \\ &= \left(150 \cdot 1200 - (0,05)\,(1200)^2\right) - \left(150 \cdot 100 - (0,05)\,(1000)^2\right) \\ &= 108000 - 100000 = 8000 \end{aligned}$$

olur. □

11. *$f(x) = -5x^2 + x$ olsun. f nin $[-1,2]$ aralığındaki ortalama değerini bulunuz.*

Çözüm: *f nin* $[-1,2]$ aralığındaki ortalama değeri y_0 olsun.

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{2} \left(-5x^2 + x\right) dx = \tfrac{1}{3}\left[\tfrac{-5}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{2} \\ &= \tfrac{1}{3}\left[\left(\tfrac{-40}{3} + 2\right) - \left(\tfrac{5}{3} + \tfrac{1}{2}\right)\right] = -\tfrac{9}{2} \end{aligned}$$

olur. □

12. *Bir malın fiyat-talep denklemi, $p = D(x) = 100e^{-0,05x}$ eşitliğiyle verilmiştir.* $[60,80]$ *aralığındaki ortalama fiyatı bulunuz.*

Çözüm: $[60,80]$ aralığındaki ortalama fiyat p_0 olsun.

$$\begin{aligned} p_0 &= \frac{1}{b-a}\int_a^b D(x)dx = \frac{1}{20}\int_{60}^{80} 100e^{-0,05x}\,dx = 5\left[\tfrac{1}{-0,05}e^{-0,05x}\right]_{60}^{80} \\ &= -100\left[e^{-4} - e^{-3}\right] = 100\left(e^{-3} - e^{-4}\right) \approx 3,147 \end{aligned}$$

olur. □

6 – 2. DEĞİŞKEN DEĞİŞTİRME YÖNTEMİ

1. $\int \frac{2}{5-4x}\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $1-4x=u$ diyelim. $-4dx=du$ olduğundan $dx=\frac{du}{-4}$ olur. Buna göre verilen integral

$$\int \frac{2}{5-4x}\,dx \;=\; \int \frac{2}{u}\,\frac{du}{-4} \;=\; \tfrac{2}{-4}\int \frac{1}{u}\,du \;=\; -\tfrac{1}{2}\ln|u|+c \;=\; -\tfrac{1}{2}\ln|5-4x|+c$$

olur. □

2. $\int \frac{4x}{(5x^2-2)^7}\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $5x^2-2=u$ diyelim. $10x\,dx=du$ olduğundan $dx=\frac{du}{10x}$ olur. Buna göre

$$\begin{aligned}\int \frac{4x}{(5x^2-2)^7}\,dx \;&=\; \int \frac{4x}{u^7}\,\frac{du}{10x} \;=\; \tfrac{4}{10}\int \frac{1}{u^7}\,du \;=\; \tfrac{2}{5}\int u^{-7}\,du \\ &=\; \tfrac{2}{5}\,\tfrac{1}{(-6)}\,u^{-6}+c \;=\; \tfrac{-1}{15}\left(5x^2-2\right)^{-6}+c \;=\; \frac{-1}{15\left(5x^2-2\right)^6}+c\end{aligned}$$

olur. □

3. $\int \sqrt{2-3x}\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm: (a) $2-3x=u$ diyelim. $-3dx=du$ olduğu hemen görülür. Buradan $dx=\frac{1}{-3}\,du$ bulunur. Buna göre

$$\int \sqrt{2-3x}\,dx=\int \sqrt{u}\,\tfrac{1}{-3}\,du=-\tfrac{1}{3}\int u^{1/2}\,du=-\tfrac{2}{9}\,u^{3/2}=-\tfrac{2}{9}\,(2-3x)^{3/2}+c=-\tfrac{2}{9}\sqrt{(2-3x)^3}+c$$

olur. □

4. $\int \frac{5x^4-3}{\sqrt{x^5-3x+1}}\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm: $x^5-3x+1=u$ diyelim. $\left(5x^4-3\right)dx=du$ olduğundan $dx=\dfrac{du}{5x^4-3}$ olur. Buna göre

$$\int \frac{5x^4-3}{\sqrt{x^5-3x+1}}\,dx \;=\; \int \frac{5x^4-3}{\sqrt{u}}\,\frac{du}{5x^4-3} \;=\; \int u^{-1/2}\,du \;=\; 2u^{1/2}+c \;=\; 2\sqrt{x^5-3x+1}+c$$

olur. □

5. $\int \dfrac{2x+5}{\sqrt{x^2+5x-1}}dx$ *integralini hesaplayınız.*

6. $\int \dfrac{10x-2}{\sqrt{5x^2-2x}}dx$ *integralini hesaplayınız.*

7. $\int \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}dx$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm: $\sqrt{x}=u$ diyelim. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx=du$ olduğundan $dx=2udu$ olur. Buna göre

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}dx \;=\; \int \frac{e^u}{2u}2udu \;=\; \int e^u du \;=\; e^u+c \;=\; e^{\sqrt{x}}+c$$

dir. □

8. $\int e^{2x-1}dx$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm: $2x-1=u$ diyelim. $2dx=du$ olduğundan $dx=\frac{du}{2}du$ olur. Buna göre

$$\int e^{2x-1}dx \;=\; \int e^u \tfrac{du}{2}du \;=\; \tfrac{1}{2}\int e^u du \;=\; \tfrac{1}{2}e^u+c \;=\; \tfrac{1}{2}e^{2x-1}+c$$

dir. □

9. $\int e^{-2x}dx$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm: $-2x=u$ diyelim. $-2dx=du$ olduğundan $dx=\frac{du}{-2}du$ olur. Buna göre

$$\int e^{-2x}dx \;=\; \int e^u \tfrac{du}{-2}du \;=\; -\tfrac{1}{2}\int e^u du \;=\; -\tfrac{1}{2}e^u+c \;=\; -\tfrac{1}{2}e^{-2x}+c$$

dir. □

10. $\int e^{-x}dx$ *integralini hesaplayınız.*

11. $\int e^{5x}dx$ *integralini hesaplayınız.*

12. $\int xe^{3-x^2}dx$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm: $3-x^2=u$ diyelim. $-2xdx=du$ olduğundan $dx=\frac{du}{-2x}du$ olur. Buna göre

$$\int xe^{3-x^2}\,dx \;=\; \int xe^u\,\tfrac{du}{-2x} \;=\; -\tfrac{1}{2}\int e^u\,du \;=\; -\tfrac{1}{2}e^u + c \;=\; -\tfrac{1}{2}e^{3-x^2} + c$$

dir. □

13. $\int \frac{1}{x}e^{\ln x}\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm: $\ln x = u$ diyelim. $\dfrac{1}{x}dx = du$ olduğundan $dx = x\,du$ olur. Buna göre

$$\int \tfrac{1}{x}e^{\ln x}\,dx \;=\; \int \tfrac{1}{x}e^u\,x\,du \;=\; \int e^u\,du \;=\; e^u + c \;=\; e^{\ln x} + c$$

dir. □

14. $\displaystyle\int 2^{7x}\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm: $7x = u$ diyelim. $7dx = du$ olduğundan $dx = \frac{du}{7}\,du$ olur. Buna göre

$$\int 2^{7x}\,dx \;=\; \int 2^u\,\tfrac{du}{7} \;=\; \tfrac{1}{7}\int 2^u\,du \;=\; \tfrac{1}{7}\tfrac{1}{\ln 2}2^u + c \;=\; \tfrac{1}{7\ln 2}2^{7x} + c$$

dir. □

15. $\displaystyle\int \frac{5^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm: $\sqrt{x} = u$ diyelim. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx = du$ olduğundan $dx = 2u\,du$ olur. Buna göre

$$\int \frac{5^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx \;=\; \int \frac{5^u}{u}2u\,du \;=\; 2\int 5^u\,du \;=\; 2\tfrac{1}{\ln 5}5^u + c \;=\; \tfrac{2}{\ln 5}5^{\sqrt{x}} + c$$

dir. □

16. $\int \frac{\ln 5}{x}5^{\ln x}\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm: $\ln x = u$ diyelim. $\dfrac{1}{x}dx = du$ olduğundan $dx = x\,du$ olur. Buna göre

$$\int \tfrac{\ln 5}{x}5^{\ln x}\,dx \;=\; \int \tfrac{\ln 5}{x}5^u\,x\,du \;=\; (\ln 5)\int 5^u\,du \;=\; 5^u + c \;=\; 5^{\ln x} + c$$

dir. □

17. $\displaystyle\int \frac{4 + 3\cos x}{2\sin x}\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm:

$$\int \frac{4+3\cos x}{2\sin x}\,dx \;=\; 2\int \frac{1}{\sin x}\,dx + \tfrac{3}{2}\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$$
$$\;=\; 2\ln|\csc x - \cot x| + \tfrac{3}{2}\ln|\sin x| + c$$

dir. □

18. $\int \cos(4x-7)\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm: $4x-7=u$ diyelim. $4dx=du$ olduğundan $dx=\frac{du}{4}$ olur. Buna göre

$$\int \cos(4x-7)\,dx \;=\; \int \cos u\,\tfrac{du}{4} \;=\; \tfrac{1}{4}\int \cos u\,du \;=\; \tfrac{1}{4}\sin u + c \;=\; \tfrac{1}{4}\sin(4x-7)+c$$

olur. □

19. $\int \sin(2x+8)\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

20. $\int 3x^2\cos(2+x^3)\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm: $2+x^3=u$ diyelim. $3x^2dx=du$ olduğundan $dx=\dfrac{du}{3x^2}$ olur. Buna göre

$$\int 3x^2\cos(2+x^3)\,dx \;=\; \int 3x^2\cos u\,\frac{du}{3x^2} \;=\; \int \cos u\,du \;=\; \sin u + c \;=\; \sin(2+x^3)+c$$

olur. □

21. $\int x^2\sin(x^3-1)\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

22. $\displaystyle\int \frac{\sin\sqrt{x}}{4\sqrt{x}}\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $\sqrt{x}=u$ diyelim. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx=du$ olduğundan $dx=2\sqrt{x}\,du=2u\,du$ olur. Buna göre

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{4\sqrt{x}}\,dx \;=\; \int \frac{\sin u}{4u}\,2u\,du \;=\; \tfrac{1}{2}\int \sin u\,du \;=\; -\tfrac{1}{2}\cos u + c \;=\; -\tfrac{1}{2}\cos\sqrt{x}+c$$

dir. □

23. $\displaystyle\int \frac{2\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ integralini hesaplayınız.

24. $\int \sin x\cos^6 x\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm: $\cos x = u$ diyelim. $-\sin x\,dx = du$ olduğundan $dx = \frac{du}{-\sin x}$ olur. Buna göre

$$\int \sin x \cos^6 x\,dx \;=\; \int (\sin x)\, u^6 \tfrac{du}{-\sin x} \;=\; -\int u^6\,du \;=\; -\tfrac{1}{7}u^7 + c \;=\; -\tfrac{1}{7}\cos^7 x + c$$

olur. □

25. $\int \cos x \sin^6 x\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

26. $\int \cos x \sin^4 x\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

27. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^5 x}\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $\cos x = u$ diyelim. $-\sin x\,dx = du$ olduğundan $dx = \frac{du}{-\sin x}$ olur. Buna göre

$$\int \frac{\sin x}{\cos^5 x}\,dx \;=\; \int \frac{\sin x}{u^5}\,\frac{du}{-\sin x} \;=\; -\int u^{-5}\,du \;=\; \tfrac{1}{4}u^{-4} + c \;=\; \frac{1}{4\cos^4 x} + c$$

dir. □

28. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^5 x}\,dx$ integralini hesaplayınız.

29. $\displaystyle\int \frac{\tan\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $\sqrt{x} = u$ diyelim. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = du$ olduğundan $dx = 2u\,du$ olur. Buna göre

$$\int \frac{\tan\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\,dx \;=\; \int \frac{\tan u}{2u}\,2u\,du \;=\; \int \tan u\,du \;=\; -\ln|\cos u| + c \;=\; -\ln|\cos\sqrt{x}| + c$$

dir. □

30. $\displaystyle\int \frac{\cot\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $\sqrt{x} = u$ diyelim. $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = du$ olduğundan $dx = 2u\,du$ olur. Buna göre

$$\int \frac{\cot\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\,dx \;=\; \int \frac{\cot u}{2u}\,2u\,du \;=\; \int \cot u\,du \;=\; \ln|\sin u| + c \;=\; \ln|\sin\sqrt{x}| + c$$

dir. □

31. $\displaystyle\int \frac{x\tan\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $\sqrt{x^2+1}=u$ diyelim. $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx=du$ olduğundan $dx=\frac{u}{x}\,du$ olur. Buna göre

$$\int \frac{x\tan\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\,dx \;=\; \int \frac{x\tan u}{u}\,\frac{u}{x}\,du \;=\; \int \tan u\,du$$
$$= \;-\ln|\cos u|+c \;=\; -\ln\left|\cos\sqrt{x^2+1}\right|+c$$

dir. □

32. $\displaystyle\int \frac{x\cot\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $\sqrt{1-x^2}=u$ diyelim. $\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=du$ olduğundan $dx=\frac{u}{-x}\,du$ olur. Buna göre

$$\int \frac{x\cot\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \;=\; \int \frac{x\cot u}{u}\,\frac{u}{-x}\,du \;=\; -\int \cot u\,du$$
$$= \;-\ln|\sin u|+c \;=\; -\ln\left|\sin\sqrt{1-x^2}\right|+c$$

dir. □

33. $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $\arctan x=u$ diyelim. $\dfrac{1}{1+x^2}\,dx=du$ olduğundan $dx=\left(1+x^2\right)du$ olur. Buna göre

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx \;=\; \int \frac{u}{1+x^2}\left(1+x^2\right)du \;=\; \int u\,du \;=\; \tfrac{1}{2}u^2+c \;=\; \tfrac{1}{2}\left(\arctan x\right)^2+c$$

dir. □

34. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arccot} x}{1+x^2}\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $\operatorname{arccot} x=u$ diyelim. $\dfrac{-1}{1+x^2}\,dx=du$ olduğundan $dx=-\left(1+x^2\right)du$ olur. Buna göre

$$\int \frac{\operatorname{arccot} x}{1+x^2}\,dx \;=\; -\int \frac{u}{1+x^2}\left(1+x^2\right)du \;=\; -\int u\,du \;=\; -\tfrac{1}{2}u^2+c \;=\; -\tfrac{1}{2}\left(\operatorname{arccot} x\right)^2+c$$

dir. □

35. $\int \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $\arcsin x = u$ diyelim. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = du$ olduğundan $dx = \sqrt{1-x^2}\,du$ olur. Buna göre

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \;=\; \int \frac{u}{\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-x^2}\,du \;=\; \int u\,du \;=\; \tfrac{1}{2}u^2 + c \;=\; \tfrac{1}{2}\left(\arcsin x\right)^2 + c$$

dir. □

36. $\int 2\sec^2 x \tan x\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm: $\tan x = u$ diyelim. $\sec^2 x\,dx = du$ olduğundan $dx = \frac{du}{\sec^2 x}$ olur. Buna göre

$$\int 2\sec^2 x \tan x\,dx \;=\; \int 2\left(\sec^2 x\right) u \frac{du}{\sec^2 x} \;=\; \int 2u\,du \;=\; u^2 + c \;=\; \tan^2 x + c$$

olur. □

37. $\int 2\csc^2 x \cot x\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm: $\cot x = u$ diyelim. $-\csc^2 x\,dx = du$ olduğundan $dx = \frac{du}{-\csc^2 x}$ olur. Buna göre

$$\int 2\csc^2 x \cot x\,dx \;=\; \int 2\left(\csc^2 x\right) u \frac{du}{-\csc^2 x} \;=\; -\int 2u\,du \;=\; -u^2 + c \;=\; -\cot^2 x + c$$

olur. □

38. $\int 3\sec^2 x \tan^2 x\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm: $\tan x = u$ diyelim. $\sec^2 x\,dx = du$ olduğundan $dx = \frac{du}{\sec^2 x}$ olur. Buna göre

$$\int 3\sec^2 x \tan^2 x\,dx \;=\; \int 3\left(\sec^2 x\right) u^2 \frac{du}{\sec^2 x} \;=\; \int 3u^2\,du \;=\; u^3 + c \;=\; \tan^3 x + c$$

olur. □

39. $\int 3\csc^2 x \cot^2 x\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm: $\cot x = u$ diyelim. $-\csc^2 x\,dx = du$ olduğundan $dx = \frac{du}{-\csc^2 x}$ olur. Buna göre

$$\int 3\csc^2 x \cot^2 x\,dx \;=\; \int 3\left(\csc^2 x\right) u^2 \frac{du}{-\csc^2 x} \;=\; -\int 3u^2\,du \;=\; -u^3 + c \;=\; -\cot^3 x + c$$

olur. □

40. $\int e^{\sin x}\cos x\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm: $\sin x = u$ diyelim. $\cos x\,dx = du$ olduğundan $dx = \frac{du}{\cos x}$ olur. Buna göre

$$\int e^{\sin x}\cos x\,dx \;=\; \int e^u \cos x \frac{du}{\cos x} \;=\; \int e^u\,du \;=\; e^u + c \;=\; e^{\sin x} + c$$

olur. □

41. $\int e^{\cos x}\sin x\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm: $\cos x = u$ diyelim. $-\sin x\,dx = du$ olduğundan $dx = \frac{du}{-\sin x}$ olur. Buna göre

$$\int e^{\cos x}\sin x\,dx \;=\; \int e^u \sin x \frac{du}{-\sin x} \;=\; -\int e^u\,du \;=\; -e^u + c \;=\; -e^{\cos x} + c$$

olur. □

42. $\int e^{-4\cos x}\sin x\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm: $-4\cos x = u$ diyelim. $4\sin x\,dx = du$ olduğundan $dx = \frac{du}{4\sin x}$ olur. Buna göre

$$\int e^{-4\cos x}\sin x\,dx \;=\; \int e^u \sin x \frac{du}{4\sin x} \;=\; \tfrac{1}{4}\int e^u\,du \;=\; \tfrac{1}{4}e^u + c \;=\; \tfrac{1}{4}e^{-4\cos x} + c$$

olur. □

43. $\int e^{4+\ln\sin x}\cot x\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm: $4 + \ln\sin x = u$ diyelim. $\cot x\,dx = du$ olduğundan $dx = \frac{du}{\cot x}$ olur. Buna göre

$$\int e^{4+\ln\sin x}\cot x\,dx \;=\; \int e^u \cot x \frac{du}{\cot x} \;=\; \int e^u\,du \;=\; e^u + c \;=\; e^{4+\ln\sin x} + c$$

olur. □

44. $\int e^{1+\ln\cos x}\tan x\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

45. $\displaystyle\int \frac{2^{1/x}}{x^2}\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm: $\frac{1}{x} = u$ diyelim. $\dfrac{-1}{x^2}\,dx = du$ olduğundan $dx = -x^2\,du$ olur. Buna göre

$$\int \frac{2^{1/x}}{x^2}\,dx \;=\; \int \frac{2^u}{x^2}\left(-x^2\right)du \;=\; -\int 2^u\,du \;=\; -\tfrac{1}{\ln 2}2^u + c \;=\; \tfrac{-1}{\ln 2}2^{1/x} + c$$

dir. □

46. $\int e^x\cos(e^x)\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm: $e^x = u$ diyelim. $e^x\,dx = du$ olduğundan $dx = \frac{du}{u}$ olur. Buna göre

$$\int e^x \cos(e^x)\,dx \;=\; \int u \cos u \,\frac{du}{u} \;=\; \int \cos u\,du \;=\; \sin u + c \;=\; \sin(e^x) + c$$

olur. □

47. $\int e^x \sin(e^x)\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

48. $\displaystyle\int \frac{x^3 dx}{1+x^8}$ integralini hesaplayınız.

Çözüm: $x^4 = u$ diyelim. $4x^3 dx = du$ olduğundan $dx = \dfrac{du}{4x^3}$ olur. Buna göre

$$\int \frac{x^3 dx}{1+x^8} \;=\; \int \frac{x^3}{1+u^2}\,\frac{du}{4x^3} \;=\; \tfrac{1}{4}\int \frac{1}{1+u^2}\,du \;=\; \tfrac{1}{4}\arctan u + c \;=\; \tfrac{1}{4}\arctan(x^4) + c$$

dir. □

$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}\arctan(x^4)\right) = \frac{x^3}{x^8+1}$
$= (\sin x)\, e^{-4\cos x}$

6 – 4. KISMİ İNTEGRASYON YÖNTEMİ

1. $\int (x-4)(x+3)^5\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm: $x-4=u,\ (x+3)^5\,dx=dv$ diyelim. $dx=du$ ve $\frac{1}{6}(x+3)^6=v$ olur. Buna göre

$$\begin{aligned}\int (x-4)(x+3)^5\,dx &= (x-4)\left(\tfrac{1}{6}(x+3)^6\right)-\int \tfrac{1}{6}(x+3)^6\,dx\\ &= \tfrac{1}{6}(x-4)(x+3)^6-\tfrac{1}{42}(x+3)^7+c\end{aligned}$$

olur. □

2. $\int (x-1)^2(x+4)^3\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm: $(x-1)^2=u,\ (x+4)^3\,dx=dv$ diyelim. $2(x-1)dx=du$ ve $\frac{1}{4}(x+4)^4=v$ olur. Buna göre

$$\begin{aligned}\int (x-1)^2(x+4)^3\,dx &= (x-1)^2\left(\tfrac{1}{4}(x+4)^4\right)-\int \tfrac{1}{4}(x+4)^4\,2(x-1)\,dx\\ &= \tfrac{1}{4}(x-1)^2(x+4)^4-\tfrac{1}{2}\int (x-1)(x+4)^4\,dx\end{aligned}$$

olur. Şimdi sağ yandaki $\int (x-1)(x+4)^4\,dx$ integralini hesaplamak için bu integralde kısmi integrasyon yöntemini uygulayacağız. $x-1=t,\ (x+4)^4\,dx=dh$ diyelim.

$$dx=dt \quad \text{ve} \quad \tfrac{1}{5}(x+4)^5=h$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}\int (x-5)(x+1)^3\,dx &= \int t\,dh=th-\int h\,dt = (x-1)\left(\tfrac{1}{5}(x+4)^5\right)-\int \tfrac{1}{5}(x+4)^5\,dx\\ &= \tfrac{1}{5}(x-1)(x+4)^5-\tfrac{1}{30}(x+4)^6\end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki $\int (x-1)(x+4)^4\,dx$ integrali yerine burada bulunan eşiti konularak

$$\int (x-1)^2(x+4)^3\,dx = \tfrac{1}{4}(x-1)^2(x+4)^4-\tfrac{1}{10}(x-1)(x+4)^5+\tfrac{1}{60}(x+4)^6+c$$

elde edilir. □

3. $\int x^2\sin x\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm: $x^2=u,\ \sin x\,dx=dv$ diyelim. $2x\,dx=du$ olduğu hemen görülür. $\int \sin x\,dx=\int dv$ eşitliğinden de $-\cos x=v$ elde edilir.

$$\int x^2\sin x\,dx=\int u\,dv=uv-\int v\,du=x^2(-\cos x)-\int(-\cos x)\,2x\,dx=-x^2\cos x+2\int x\cos x\,dx$$

olur. $\int x\cos x\,dx$ integralini hesaplamak için bu integralde yeniden kısmi integrasyon yöntemi uygulayalım. $x=t,\ \cos x\,dx=dh$ diyelim. $dx=dt$ ve $\sin x=h$ elde edilir.

$$\int x\cos x\,dx=\int t\,dh=th-\int h\,dt=x\sin x-\int \sin x\,dx=x\sin x-(-\cos x)=x\sin x+\cos x$$

olur. Böylece

$$\int x^2 \sin x\,dx = -x^2\cos x + 2\left(x\sin x + \cos x\right) = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + c$$

bulunur. □

4. $\int \ln x\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm: $\ln x = u,\ dx = dv$ diyelim. $\frac{1}{x}dx = du$ ve $x = v$ elde edilir.

$$\int \ln x\,dx = (\ln x)\,x - \int x\left(\tfrac{1}{x}dx\right) = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + c$$

olur. □

5. $\int (\ln x)^2\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm: $\ln x = u,\ \ln x\,dx = dv$ diyelim. $\frac{1}{x}dx = du$ ve $x\ln x - x = v$ elde edilir.

$$\begin{aligned}\int (\ln x)^2\,dx &= (\ln x)\,(x\ln x - x) - \int (x\ln x - x)\left(\tfrac{1}{x}dx\right)\\ &= x(\ln x)^2 - x\ln x - \int \ln x\,dx + \int dx\\ &= x(\ln x)^2 - x\ln x - (x\ln x - x) + x + c\\ &= x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + c\end{aligned}$$

olur. □

6. $\int x\ln x\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm: $\ln x = u,\ x\,dx = dv$ diyelim. $\frac{1}{x}dx = du$ ve $\frac{1}{2}x^2 = v$ elde edilir.

$$\int x\ln x\,dx = (\ln x)\left(\tfrac{1}{2}x^2\right) - \int \left(\tfrac{1}{2}x^2\right)\left(\tfrac{1}{x}dx\right) = \tfrac{1}{2}x^2\ln x - \tfrac{1}{2}\int x\,dx = \tfrac{1}{2}x^2\ln x - \tfrac{1}{4}x^2 + c$$

olur. □

7. $\int x^2\ln x\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm: $\ln x = u,\ x^2\,dx = dv$ diyelim. $\frac{1}{x}dx = du$ ve $\frac{1}{3}x^3 = v$ elde edilir.

$$\int x^2\ln x\,dx = (\ln x)\left(\tfrac{1}{3}x^3\right) - \int \left(\tfrac{1}{3}x^3\right)\left(\tfrac{1}{x}dx\right) = \tfrac{1}{3}x^3\ln x - \tfrac{1}{3}\int x^2\,dx = \tfrac{1}{3}x^3\ln x - \tfrac{1}{9}x^3 + c$$

olur. □

8. $\int xe^{3x}\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm: $x = u,\ e^{3x}dx = dv$ diyelim. $dx = du$ ve $\frac{1}{3}e^{3x} = v$ elde edilir.

$$\int xe^{3x}\,dx = x\left(\tfrac{1}{3}e^{3x}\right) - \int \left(\tfrac{1}{3}e^{3x}\right)dx = \tfrac{1}{3}xe^{3x} - \tfrac{1}{3}\int e^{3x}\,dx = \tfrac{1}{3}xe^{3x} - \tfrac{1}{9}e^{3x} + c$$

olur. □

9. $\int 6x^2e^{3x}\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm: $x^2 = u,\ 6e^{3x}\,dx = dv$ diyelim. $2x\,dx = du$ ve $2e^{3x} = v$ elde edilir.

$$\int 6x^2e^{3x}\,dx \;=\; x^2\left(2e^{3x}\right) - \int 2e^{3x}\left(2x\,dx\right) \;=\; 2x^2e^{3x} - 4\int xe^{3x}\,dx$$

olur. Şimdi sağ yandaki $\int xe^{3x}\,dx$ integralini hesaplamak için bu integralde kısmi integrasyon yöntemini uygulayacağız. $x = t,\ e^{3x}\,dx = dh$ diyelim. $dx = dt$ ve $\frac{1}{3}e^{3x} = h$ elde edilir.

$$\int xe^{3x}\,dx \;=\; \int t\,dh = th - \int h\,dt \;=\; x\left(\tfrac{1}{3}e^{3x}\right) - \int \tfrac{1}{3}e^{3x}\,dx \;=\; \tfrac{1}{3}xe^{3x} - \tfrac{1}{9}e^{3x}$$

bulunur. Yukarıdaki $\int xe^{3x}\,dx$ integrali yerine burada bulunan eşiti konularak

$$\int 6x^2e^{3x}\,dx \;=\; 2x^2e^{3x} - 4\left(\tfrac{1}{3}xe^{3x} - \tfrac{1}{9}e^{3x}\right) + c \;=\; 2x^2e^{3x} - \tfrac{4}{3}xe^{3x} + \tfrac{4}{9}e^{3x} + c$$

elde edilir. □

10. $\int 4xe^{-4x}\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm: $x = u,\ 4e^{-4x}\,dx = dv$ diyelim. $dx = du$ ve $-e^{-4x} = v$ elde edilir.

$$\int 4xe^{-4x}\,dx \;=\; x\left(-e^{-4x}\right) - \int \left(-e^{-4x}\right)dx \;=\; -xe^{-4x} + \int e^{-4x}\,dx \;=\; -xe^{-4x} - \tfrac{1}{4}e^{-4x} + c$$

olur. □

11. $\int 2\sin(\ln x)\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm: $2\sin(\ln x) = u,\ dx = dv$ diyelim. $2\left(\cos(\ln x)\right)\frac{1}{x}\,dx = du$ ve $x = v$ elde edilir.

$$\int 2\sin(\ln x)\,dx \;=\; 2\left(\sin(\ln x)\right)x - \int x\left(\cos(\ln x)\right)\tfrac{2}{x}\,dx \;=\; 2x\sin(\ln x) - 2\int \cos(\ln x)\,dx$$

olur. Şimdi sağ yandaki $\int \cos(\ln x)\,dx$ integralini hesaplamak için bu integralde kısmi integrasyon yöntemini uygulayacağız. $\cos(\ln x) = t,\ \ dx = dh$ diyelim. $\left(-\sin(\ln x)\right)\frac{1}{x}\,dx = dt$ ve $x = h$ elde edilir.

$$\begin{aligned}\int \cos(\ln x)\,dx \;&=\; \int t\,dh = th - \int h\,dt \;=\; \left(\cos(\ln x)\right)x - \int x\left(-\sin(\ln x)\right)\tfrac{1}{x}\,dx \\ &=\; x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\,dx\end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki $\int \cos(\ln x)\,dx$ integrali yerine burada bulunan eşiti konularak

$$\begin{aligned}\int 2\sin(\ln x)\,dx \;&=\; 2x\sin(\ln x) - 2\left(x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\,dx\right) \\ &=\; 2x\sin(\ln x) - 2x\cos(\ln x) - 2\int \sin(\ln x)\,dx\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitliğin sağ yanında bulunan $\int \sin(\ln x)\,dx$ integrali sol tarafa geçirilerek

$$\int 2\sin(\ln x)\,dx \;=\; x\sin(\ln x) - x\cos(\ln x)$$

bulunur. □

12. $\int 2\cos(\ln x)\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

13. $\int 4x^3e^{2x}\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm: $x^3 = u,\ 4e^{2x}\,dx = dv$ diyelim. $3x^2\,dx = du$ ve $2e^{2x} = v$ elde edilir.

$$\int 4x^3e^{2x}\,dx \;=\; x^3\left(2e^{2x}\right) - \int 2e^{2x}\left(3x^2\,dx\right) \;=\; 2x^3e^{2x} - 6\int x^2e^{2x}\,dx \tag{1}$$

olur. Şimdi sağ yandaki $\int x^2e^{2x}\,dx$ integralini hesaplamak için bu integralde kısmi integrasyon yöntemini uygulayacağız. $x^2 = t,\ e^{2x}\,dx = dh$ diyelim. $2x\,dx = dt$ ve $\frac{1}{2}e^{2x} = h$ elde edilir.

$$\int x^2e^{2x}\,dx \;=\; \int t\,dh = th - \int h\,dt \;=\; x^2\left(\tfrac{1}{2}e^{2x}\right) - \int \tfrac{1}{2}e^{2x}\,(2x\,dx) \;=\; \tfrac{1}{2}x^2e^{2x} - \int xe^{2x}\,dx$$

olur. (1) eşitliğindeki $\int x^2e^{2x}\,dx$ integrali yerine burada bulunan eşiti konularak

$$\int 4x^3e^{2x}\,dx \;=\; 2x^3e^{2x} - 6\left(\tfrac{1}{2}x^2e^{2x} - \int xe^{2x}\,dx\right) \;=\; 2x^3e^{2x} - 3x^2e^{2x} + 6\int xe^{2x}\,dx \tag{2}$$

elde edilir. Şimdi (2) eşitliğinin sağ yanındaki $\int xe^{2x}\,dx$ integralini hesaplamak için bu integralde kısmi integrasyon yöntemini uygulayacağız. $x = r,\ e^{2x}\,dx = ds$ diyelim. $dx = dr$ ve $\frac{1}{2}e^{2x} = s$ elde edilir.

$$\int xe^{2x}\,dx \;=\; \int r\,ds = rs - \int s\,dr \;=\; x\left(\tfrac{1}{2}e^{2x}\right) - \int \tfrac{1}{2}e^{2x}\,dx \;=\; \tfrac{1}{2}xe^{2x} - \tfrac{1}{4}e^{2x}$$

olur. (2) eşitliğindeki $\int xe^{2x}\,dx$ integrali yerine burada bulunan eşiti konularak

$$\int 4x^3e^{2x}\,dx \;=\; 2x^3e^{2x} - 3x^2e^{2x} + 6\left(\tfrac{1}{2}xe^{2x} - \tfrac{1}{4}e^{2x}\right) + c \;=\; e^{2x}\left(2x^3 - 3x^2 + 3x - \tfrac{3}{2}\right) + c$$

bulunur. □

14. $\int \sec^3 x\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm: $\sec x = u,\ \sec^2 x\,dx = dv$ diyelim. $\sec x\tan x\,dx = du$ ve $\tan x = v$ elde edilir.

$$\int \sec^3 x\,dx \;=\; \sec x\tan x - \int \tan x\,(\sec x\tan x\,dx) \;=\; \sec x\tan x - \int \sec x\tan^2 x\,dx$$

olur.

$$\int \sec x\tan^2 x\,dx \;=\; \int \sec x\left(\sec^2 x - 1\right)dx \;=\; \int \sec^3 x\,dx - \int \sec x\,dx$$

olduğu göz önüne alınarak

$$\begin{aligned}\int \sec^3 x\,dx \;&=\; \sec x\tan x - \left(\int \sec^3 x\,dx - \int \sec x\,dx\right)\\ &=\; \sec x\tan x - \int \sec^3 x\,dx + \int \sec x\,dx\\ &=\; \sec x\tan x - \int \sec^3 x\,dx + \ln|\sec x + \tan x|\end{aligned}$$

bulunur. Böylece elde edilen eşitliğin sağ yanında da hesaplanmak istenilen integralin bulunduğunu gördünüz mü? Bu integral sol yana alınıp gerekli işlemler yapılarak

$$\int \sec^3 x\,dx \;=\; \tfrac{1}{2}\sec x\tan x + \tfrac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + c$$

elde edilir. □

15. *$a \in \mathbb{R}^+$ olduğuna göre $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$ integralini hesaplayınız.*

Çözüm: $x = a\tan t$ diyelim. $dx = a\sec^2 t\,dt$ olur.

$$\sqrt{x^2+a^2} \;=\; \sqrt{(a\tan t)^2+a^2} \;=\; \sqrt{a^2\tan^2 t + a^2} \;=\; a\sec t$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx &= a^2\int \sec^3 t\,dt \;=\; a^2\left(\tfrac{1}{2}\sec t\tan t + \tfrac{1}{2}\ln|\sec t+\tan t|\right)\\ &= \tfrac{1}{2}a^2\left(\sec t\tan t + \ln|\sec t+\tan t|\right)+c_1\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin en sağında bulunan $\sec t$ ve $\tan t$ yerine x değişkenine bağlı eşitini koymalıyız. Bunun için $\tan t = \frac{x}{a}$ ve $\sec t = \sqrt{1+\tan^2 t} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2+x^2}$ olduğundan

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx &= \tfrac{1}{2}a^2\left(\sec t\tan t + \ln|\sec t+\tan t|\right)+c_1\\ &= \tfrac{1}{2}a^2\left(\tfrac{1}{a}\sqrt{a^2+x^2}\tfrac{x}{a} + \ln\left|\tfrac{1}{a}\sqrt{a^2+x^2}+\tfrac{x}{a}\right|\right)+c_1\\ &= \tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2} + \tfrac{1}{2}a^2\ln\left|\sqrt{a^2+x^2}+x\right|+c\end{aligned}$$

elde edilir. □

16. *$a \in \mathbb{R}^+$ olduğuna göre $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$ integralini hesaplayınız.*

Çözüm: $x = a\sec t$ diyelim. $dx = a\sec t\tan t\,dt$ olur.

$$\sqrt{x^2-a^2} \;=\; \sqrt{(a\sec t)^2-a^2} \;=\; \sqrt{a^2\sec^2 t - a^2} \;=\; a\tan t$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx &= a^2\int \sec t\tan^2 t\,dt \;=\; a^2\int \sec t\left(\sec^2 t-1\right)dt \;=\; a^2\left(\int \sec^3 t\,dt - \int \sec t\,dt\right)\\ &= \tfrac{1}{2}a^2\sec t\tan t + \tfrac{1}{2}a^2\ln|\sec t+\tan t| - a^2\ln|\sec t+\tan t|+c_1\\ &= \tfrac{1}{2}a^2\sec t\tan t - \tfrac{1}{2}a^2\ln|\sec t+\tan t|+c_1\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin en sağında bulunan $\sec t$ ve $\tan t$ yerine x değişkenine bağlı eşitini koymalıyız. Bunun için $\sec t = \frac{x}{a}$ ve $\tan t = \sqrt{\sec^2 t - 1} = \frac{1}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ olduğundan

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx &= \tfrac{1}{2}a^2\sec t\tan t - \tfrac{1}{2}a^2\ln|\sec t+\tan t|+c_1\\ &= \tfrac{1}{2}a^2\tfrac{x}{a}\tfrac{1}{a}\sqrt{x^2-a^2} - \tfrac{1}{2}a^2\ln\left|\tfrac{x}{a}+\tfrac{1}{a}\sqrt{x^2-a^2}\right|+c_1\\ &= \tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2} - \tfrac{1}{2}a^2\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c\end{aligned}$$

elde edilir. □

17. $\int \arcsin x\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm: $\arcsin x = u$, $dx = dv$ diyelim. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = du$ ve $x = v$ olur. Buna göre

$$\int \arcsin x\,dx \;=\; (\arcsin x)\,x - \int x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = x\,(\arcsin x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

olur. Yukarıdaki $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ integralini hesaplamak için $1-x^2 = t$ değişken değiştirmesi yapalım. $-2x\,dx = dt$ olur. Buna göre

$$\begin{aligned}\int \arcsin x\,dx \;&=\; x\,(\arcsin x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{dt}{-2x} \;=\; x\,(\arcsin x) + \int \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt \\ &=\; x\arcsin x + \sqrt{t} + c \;=\; x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c\end{aligned}$$

bulunur. □

18. $\int x\arcsin x\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm: $x = u$, $\arcsin x\,dx = dv$ diyelim. $dx = du$ ve $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} = v$ olur. Buna göre

$$\begin{aligned}\int x\arcsin x\,dx \;&=\; x\left(x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}\right) - \int \left(x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}\right)\,dx \\ &=\; x^2\arcsin x + x\sqrt{1-x^2} - \int x\arcsin x\,dx - \int \sqrt{1-x^2}\,dx\end{aligned}$$

olur. Böylece elde edilen eşitliğin sağ yanında da hesaplanmak istenilen integralin bulunduğunu gördünüz mü? Bu integral sol yana alınıp gerekli işlemler yapılarak

$$\int x\arcsin x\,dx \;=\; \tfrac{1}{2}x^2\arcsin x + \tfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} - \tfrac{1}{2}\int \sqrt{1-x^2}\,dx$$

bulunur. $x = \sin t$ değişken değiştirmesi yapılarak

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\arcsin x + \tfrac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}$$

olduğu görülebilir. Sonuç olarak

$$\int x\arcsin x\,dx = \tfrac{1}{2}x^2\arcsin x - \tfrac{1}{4}\arcsin x + \tfrac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + c$$

elde edilir. □

6 – 3. RASYONEL FONKSİYONLARIN İNTEGRASYONU

1. $\int \dfrac{x^2-3x+2}{x-3}\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm: x^2-3x+2 polinomu, $x-3$ polinomuna bölündüğünde bölüm x ve kalan 2 dir. Başka bir anlatımla

$$x^2-3x+2=(x-3)\,x+2$$

dir. Buna göre

$$\frac{x^2-3x+2}{x-3}=\frac{(x-3)\,x+2}{x-3}=x+\frac{2}{x-3}$$

olur. Bu eşitlikten yararlanarak

$$\int \frac{x^2-3x+2}{x-3}\,dx \;=\; \int x\,dx+\int \frac{2}{x-3}\,dx \;=\; \tfrac{1}{2}x^2+2\ln|x-3|+c$$

elde edilir. □

2. $\int \dfrac{-x+7}{x^2-2x-3}\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm: $\dfrac{-x+7}{x^2-2x-3}=\dfrac{-x+7}{(x-3)\,(x+1)}=\dfrac{A}{(x-3)}+\dfrac{B}{(x+1)}$ eşitliğinden,

$$\frac{-x+7}{x^2-2x-3}=\frac{A\,(x+1)+B\,(x-3)}{(x-3)\,(x+1)}$$

ve buradan da

$$\frac{-x+7}{x^2-2x-3}=\frac{(A+B)\,x+(A-3B)}{(x-3)\,(x+1)}$$

eşitliği elde edilir. İki polinomun eşit olması için polinomun katsayılarının karşılıklı olarak eşit olması gerekli ve yeterlidir. Buna göre

$$\begin{aligned} A+B &= -1\\ A-3B &= \;\;7 \end{aligned}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminden $A=1,\;\; B=-2$ bulunur.

$$\begin{aligned}\int \frac{-x+7}{x^2-2x-3}\,dx &= \int \left(\frac{1}{x-3}+\frac{-2}{x+1}\right)dx \\ &= \int \frac{1}{x-3}dx - 2\int \frac{1}{x+1}dx \\ &= \ln|x-3| - 2\ln|x+1| + c \\ &= \ln\left|\frac{x-3}{(x+1)^2}\right| + c\end{aligned}$$

olur. □

3. $\int \frac{3x^2-5x}{(x+1)(x-1)^2}\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm: $\frac{3x^2-5x}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2}$ eşitliğinden,

$$\frac{3x^2-5x}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + B(x+1)(x-1) + C(x+1)}{(x-1)(x+2)^2}$$

ve buradan da

$$\frac{3x^2-5x}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{(A+B)x^2 + (-2A+C)x + (A-B+C)}{(x-1)(x+2)^2}$$

eşitliği elde edilir. İki polinomun eşit olması için polinomun katsayılarının karşılıklı olarak eşit olması gerekli ve yeterlidir. Buna göre

$$\begin{aligned} A+B &= 3 \\ -2A+C &= -5 \\ A-B+C &= 0\end{aligned}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminden $A=2,\ B=1,\ C=-1$ bulunur.

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2-5x}{(x+1)(x-1)^2}dx &= \int \left(\frac{2}{x+1}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx \\ &= 2\int \frac{1}{x+1}dx + \int \frac{1}{x-1}dx - \int \frac{1}{(x-1)^2}dx \\ &= 2\ln|x+1| + \ln|x-1| + \tfrac{1}{x-1} + c \\ &= \ln\left|(x+1)^2(x-1)\right| + \tfrac{1}{x-1} + c\end{aligned}$$

olur. □

4. $\int \dfrac{3x^2+x+36}{x^3+9x}\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm: $\dfrac{3x^2+x+36}{x^3+9x} = \dfrac{3x^2+x+36}{x\left(x^2+9\right)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{x^2+9}$ eşitliğinden,

$$\frac{3x^2+x+36}{x\left(x^2+9\right)} = \frac{Ax^2+9A+Bx^2+Cx}{x\left(x^2+1\right)} = \frac{\left(A+B\right)x^2+Cx+9A}{x\left(x^2+1\right)}$$

eşitliği elde edilir. İki polinomun eşit olması için polinomun katsayılarının karşılıklı olarak eşit olması gerekli ve yeterlidir. Buna göre

$$\begin{aligned} A+B &= 3 \\ C &= 1 \\ 9A &= 36 \end{aligned}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminden $A=4,\ B=-1,\ C=1$ bulunur.

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2+3}{x^3+x}\,dx &= \int \left(\frac{4}{x} + \frac{-x+1}{x^2+9}\right)dx = \int \frac{4}{x}dx + \int \frac{-x+1}{x^2+9}dx \\ &= 4\ln|x| - \int \frac{x}{x^2+9}dx + \int \frac{1}{x^2+9}dx \\ &= 4\ln|x| - \tfrac{1}{2}\ln\left|x^2+9\right| + \tfrac{1}{3}\arctan\tfrac{x}{3} + c = \ln\frac{x^4}{\sqrt{x^2+9}} + \tfrac{1}{3}\arctan\tfrac{x}{3} + c \end{aligned}$$

olur. □

5. $\int \dfrac{x-3}{\left(x^2+4x+8\right)^2}\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm: x^2+4x+8 polinomu, birinci dereceden çarpanlara ayrılamayan bir polinomdur.

$x^2+4x+8 = (x+2)^2+4$ yazılabilir. $x+2=t$ diyelim.

$$dx = dt \quad \text{ve} \quad x = t-2$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-3}{\left(x^2+4x+8\right)^2}\,dx &= \int \frac{t-5}{\left(t^2+4\right)^2}\,dt \\
&= \int \frac{t}{\left(t^2+4\right)^2}\,dt - 5\int \frac{1}{\left(t^2+4\right)^2}\,dt \\
&= \frac{-1}{2\left(t^2+4\right)} - 5\cdot\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\arctan\frac{t}{2} + \frac{t}{t^2+4}\right) \\
&= \frac{-5x-14}{8\left(x^2+4x+8\right)} - \frac{5}{16}\arctan\left(\tfrac{x+2}{2}\right) + c
\end{aligned}$$

olur. □

6 – 5. ÖZEL DEĞİŞKEN DEĞİŞTİRMELER

1. $\int \cos^5 x \sin^7 x\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm: $\cos x = t$ diyelim. $-\sin x\,dx = dt$ olur. Buna göre

$$\begin{aligned}\int \cos^5 x \sin^7 x dx &= \int t^5 \left(\sin^6 x\right) \sin x\,dx = \int t^5 \left(1-\cos^2 x\right)^3 \sin x\,dx \\ &= -\int t^5 \left(1-t^2\right)^3 dt = -\int t^5 \left(1-3t^2+3t^4-t^6\right) dt \\ &= -\int \left(t^5-3t^7+3t^9-t^{11}\right) dt \\ &= -\tfrac{1}{6}\cos^6 x + \tfrac{3}{8}\cos^8 x - \tfrac{3}{10}\cos^{10} x + \tfrac{1}{12}\cos^{12} x + c\end{aligned}$$

bulunur. □

2. $\int \cos^3 x \sin^6 x\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm: $\sin x = t$ diyelim. $\cos x\,dx = dt$ olur. Buna göre

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x \sin^6 x\,dx &= \int \cos^2 x \sin^6 x \cos x\,dx = \int \left(1-\sin^2 x\right) t^6 dt \\ &= \int \left(1-t^2\right) t^6 dt = \int \left(t^6-t^8\right) dt \\ &= \tfrac{1}{7}\sin^7 x - \tfrac{1}{9}\sin^9 x + c\end{aligned}$$

bulunur. □

3. $\int \cos^2 x \sin^4 x\,dx$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm:

$$\int \cos^2 x \sin^4 x\,dx = \int \left(\tfrac{1+\cos 2x}{2}\right)\left(\tfrac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \tfrac{1}{8}\int \left(1-\cos 2x-\cos^2 2x+\cos^3 2x\right) dx$$

bulunur. $2x = u$ diyelim. $2\,dx = du$ olur. Buna göre

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x \sin^4 x dx &= \tfrac{1}{16}\int \left(1-\cos u-\cos^2 u+\cos^3 u\right) du \\ &= \tfrac{1}{16}u - \tfrac{1}{16}\sin u - \tfrac{1}{16}\int \left(\cos^2 u\right) du + \tfrac{1}{16}\int \left(\cos^3 u\right) du\end{aligned}$$

bulunur.

$$\int \left(\cos^2 u\right) du = \int \left(\tfrac{1+\cos 2u}{2}\right) du = \tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{4}\sin 2u$$

ve

$$\begin{aligned}\int \left(\cos^3 u\right) du &= \int \left(\cos^2 u\right)(\cos u)\,du = \int \left(1-\sin^2 u\right)(\cos u)\,du \\ &= \int \left(1-v^2\right) dv = v - \tfrac{1}{3}v^3 = \sin u - \tfrac{1}{3}\sin^3 u\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x \sin^4 x dx &= \tfrac{1}{16}u - \tfrac{1}{16}\sin u - \tfrac{1}{16}\left(\tfrac{1}{2}u + \tfrac{1}{4}\sin 2u\right) + \tfrac{1}{16}\left(\sin u - \tfrac{1}{3}\sin^3 u\right) \\ &= \tfrac{1}{32}u - \tfrac{1}{64}\sin 2u - \tfrac{1}{48}\sin^3 u = \tfrac{1}{16}x - \tfrac{1}{64}\sin 4x - \tfrac{1}{48}\sin^3 2x + c\end{aligned}$$

olur. □

4. $\int \cos 5x \sin 7x\, dx$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm: $\cos\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\right]$ olduğundan yararlanarak

$$\begin{aligned}\cos 5x \sin 7x\, dx &= \tfrac{1}{2}\int \left[\sin 12x - \sin(-2x)\right] dx = \tfrac{1}{2}\int (\sin 12x + \sin 2x)\, dx \\ &= \tfrac{1}{24}(-\cos 12x) + \tfrac{1}{4}(-\cos 2x) + c = \tfrac{-1}{24}\cos 12x - \tfrac{1}{4}\cos 2x + c\end{aligned}$$

bulunur. □

5. $\int \cos 3x \cos 7x\, dx$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm: $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$ olduğundan yararlanarak

$$\begin{aligned}\int \cos 3x \cos 7x\, dx &= \tfrac{1}{2}\int \left[\cos 10x + \cos(-4x)\right] dx = \tfrac{1}{2}\int (\cos 10x + \cos 4x)\, dx \\ &= \tfrac{1}{20}\sin 10x + \tfrac{1}{8}\sin 4x + c\end{aligned}$$

bulunur. □

6. $\int \sin 8x \sin 2x\, dx$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm: $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$ olduğundan yararlanarak

$$\int \sin 8x \sin 2x\, dx = \tfrac{1}{2}\int \left[\cos 6x - \cos 10x\right] dx = \tfrac{1}{12}\sin 6x - \tfrac{1}{20}\sin 10x + c$$

bulunur. □

7. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+2x}}{1-3\sqrt{1+2x}}dx$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm: $1 + 2x = u^2$ diyelim. $dx = udu$ olur. Buna göre

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{1+2x}}{1-3\sqrt{1+2x}}dx &= \int \frac{u^2}{1-3u}du = -\tfrac{1}{9}\int (3u+1)\, du + \tfrac{1}{9}\int \tfrac{1}{1-3u}du \\ &= -\tfrac{1}{6}u^2 - \tfrac{1}{9}u - \tfrac{1}{27}\ln|1-3u| + c \\ &= -\tfrac{1}{6}(1+2x) - \tfrac{1}{9}\sqrt{1+2x} - \tfrac{1}{27}\ln\left|1-3\sqrt{1+2x}\right| + c\end{aligned}$$

olur. □

8. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1-x^3}dx$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm: $\sqrt{x}=u$ diyelim. $x=u^2$ ve $dx=2udu$ olur. Buna göre

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1-x^3}dx \;=\; 2\int \frac{u^2}{1-u^6}du$$

olur. Son integralde $u^3=t$ diyelim. $3u^2du=dt$ olur. Böylece

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x}}{1-x^3}dx \;&=\; \tfrac{2}{3}\int \frac{1}{1-t^2}dt \;=\; \tfrac{2}{3}\int \left(\tfrac{1}{2(t+1)}-\tfrac{1}{2(t-1)}\right)dt\\ &=\; \tfrac{1}{3}\ln|t+1|-\tfrac{1}{3}\ln|t-1|+c \;=\; \tfrac{1}{3}\ln\left|\tfrac{t+1}{t-1}\right|+c \;=\; \tfrac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{x^3}+1}{\sqrt{x^3}-1}\right|+c\end{aligned}$$

bulunur. □

9. $\displaystyle\int \frac{x^{1/4}}{1+x^{5/2}}dx$ *integralini hesaplayınız.*

Çözüm: $x^{1/4}=u$ diyelim. $x=u^4$ ve $dx=4u^3du$ olur. Buna göre

$$\int \frac{x^{1/4}}{1+x^{5/2}}dx \;=\; \int \frac{u\cdot 4u^3}{1+u^{10}}du \;=\; 4\int \frac{u^4}{1+u^{10}}du$$

olur. Son integralde $u^5=t$ diyelim. $5u^4du=dt$ olur. Böylece

$$\begin{aligned}\int \frac{x^{1/4}}{1+x^{5/2}}dx \;&=\; \tfrac{4}{5}\int \frac{1}{1+t^2}dt \;=\; \tfrac{4}{5}\arctan t+c\\ &=\; \tfrac{4}{5}\arctan t+c \;=\; \tfrac{4}{5}\arctan\left(x^{5/4}\right)+c\end{aligned}$$

bulunur. □

8 – 5. EN KÜÇÜK KARELER YÖNTEMİ

1. Bir üreticinin ürettiği x mal miktarına (sayısına) karşılık gelen maliyet sonuçları aşağıdaki çizelgedeki gibidir.

x *üretimi* (100 *birim*)	$C(x)$ *maliyeti*
2	4
5	6
6	7
9	8

(1. çizelge)

Bu değerlerden yararlanarak üreticinin maliyet fonksiyonunu yaklaşık olarak bulunuz.

Çözüm: Verilen çizelgedeki değerler düzlemdeki koordinat sisteminde gösterildiğinde yaklaşık olarak bir doğru üsünde gibi görünürler. Bundan dolayı maliyet fonksiyonunun kuralının

$$y = ax + b$$

biçiminde olduğunu varsayabiliriz. Bir x değerine karşılık, $y = ax + b$ kuralından bulunan y değeri ile gerçek maliyeti gösteren y değeri birbirinden farklıdır. Bu farklar aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir.

x	y	$ax + b$	$farklar$
2	4	$2a + b$	$4 - 2a - b$
5	6	$5a + b$	$6 - 5a - b$
6	7	$6a + b$	$7 - 6a - b$
9	8	$9a + b$	$8 - 9a - b$

(2. çizelge)

"En iyi yaklaşık doğru"yu elde edebilmek için 2. çizelgede bulunan farkların karelerinin toplamının en küçük olmasını istiyoruz. Bu farkların karelerinin toplamına $F(a, b)$ diyelim.

$$F(a, b) = (4 - 2a - b)^2 + (6 - 5a - b)^2 + (7 - 6a - b)^2 + (8 - 9a - b)^2$$

olur. Aradığımız doğruyu belirten a ve b sayıları, F fonksiyonunu minimum yapan sayılardır.

$$F_a(a, b) = 2(4 - 2a - b)(-2) + 2(6 - 5a - b)(-5) + 2(7 - 6a - b)(-6) + 2(8 - 9a - b)(-9)$$
$$F_b(a, b) = 2(4 - 2a - b)(-1) + 2(6 - 5a - b)(-1) + 2(7 - 6a - b)(-1) + 2(8 - 9a - b)(-1)$$

olduğundan $F_a(a, b) = 292a + 44b - 304$ ve $F_b(a, b) = 44a + 8b - 50$ bulunur.

$$\begin{aligned} 292a + 44b - 304 &= 0 \\ 44a + 8b - 50 &= 0 \end{aligned}$$

denklem sisteminden $a_0 = 0,58$, $b_0 = 3,06$ bulunur.

$$F_{aa}(a_0, b_0) = 292, \quad F_{ab}(a_0, b_0) = 44, \quad F_{bb}(a_0, b_0) = 8$$

olduğundan

$$F_{ab}^2(a_0, b_0) - F_{aa}(a_0, b_0) F_{bb}(a_0, b_0) = 44^2 - 292 \cdot 8 = -400 < 0 \text{ ve } F_{aa}(a_0, b_0) > 0$$

olduğundan F fonksiyonu, (a_0, b_0) noktasında bir minimuma sahiptir.

Sonuç olarak aranılan doğrunun denklemi, $y = 0,58x + 3,06$ dir. Bu doğruya, "en küçük kareler doğrusu" veya "çekilme (regression) doğrusu" adı verilmişti.

Üretici, en küçük kareler doğrusunu kullanarak üreteceği mal miktarına karşılık gelen maliyeti kolayca hesaplayabilir.

Marjinal (birim, anlık) maliyet fonksiyonu

$$\frac{dy}{dx} = 0,58$$

olur. Ortalama maliyet fonksiyonu

$$\overline{y} = \frac{0,58x + 3,06}{x}$$

eşitliğiyle belirlidir. □

2. Aşağıdaki çizelgede verilen x ve y değerleri için en küçük kareler doğrusunu bulunuz.

x	y
1	1
2	3
3	4
4	3

(1. çizelge)

Çözüm: $y = ax + b$ biçiminde bir doğru arıyoruz. Bir x sayısına karşılık, $y = ax + b$ kuralından bulunan y değeri ile bu x sayısına çizelgede karşılık getirilen y değeri birbirinden farklıdır. Bu farklar aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir.

x	y	$ax+b$	$farklar$
1	1	$a+b$	$1-a-b$
2	3	$2a+b$	$3-2a-b$
3	4	$3a+b$	$4-3a-b$
4	3	$4a+b$	$3-4a-b$

(2. çizelge)

"En iyi yaklaşık doğru"yu elde edebilmek için 2. çizelgede bulunan farkların karelerinin toplamının en küçük olmasını istiyoruz. Bu farkların karelerinin toplamına $F(a,b)$ diyelim.

$$F(a,b) = (1-a-b)^2 + (3-2a-b)^2 + (4-3a-b)^2 + (3-4a-b)^2$$

olur. Aradığımız doğruyu belirten a ve b sayıları, F fonksiyonunu minimum yapan sayılardır.

$$F_a(a,b) = 2(1-a-b)(-1) + 2(3-2a-b)(-2) + 2(4-3a-b)(-3) + 2(3-4a-b)(-4)$$
$$F_b(a,b) = 2(1-a-b)(-1) + 2(3-2a-b)(-1) + 2(4-3a-b)(-1) + 2(3-4a-b)(-1)$$

olduğundan $F_a(a,b) = 60a + 20b - 62$ ve $F_b(a,b) = 20a + 8b - 22$ bulunur.

$$\begin{aligned} 60a + 20b - 62 &= 0 \\ 20a + 8b - 22 &= 0 \end{aligned}$$

denklem sisteminden $a_0 = 0,7$, $b_0 = 1$ bulunur.

$$F_{aa}(a_0,b_0) = 60 \text{ ve } F_{ab}(a_0,b_0) = 20,\ F_{bb}(a_0,b_0) = 8$$

olduğundan

$$F_{ab}^2(a_0,b_0) - F_{aa}(a_0,b_0)\,F_{bb}(a_0,b_0) = 20^2 - 60\cdot 8 = -80 < 0 \quad \text{ve} \quad F_{aa}(a_0,b_0) > 0$$

olduğundan F fonksiyonu, (a_0,b_0) noktasında bir minimuma sahiptir.

Sonuç olarak aranılan doğrunun denklemi, $y = 0,7x + 1$ dir. Bu doğruya, "en küçük kareler doğrusu" veya "çekilme (regression) doğrusu" adı verilmişti. □

3. Aşağıdaki çizelgede verilen x ve y değerleri için en küçük kareler doğrusunu bulunuz. $x = 2,5$ için y nin değerinin kaç olması beklenir?

x	y
1	3
2	1
2	2
4	0

(1. çizelge)

Çözüm: $y = ax + b$ biçiminde bir doğru arıyoruz. Bir x sayısına karşılık, $y = ax + b$ kuralından bulunan y değeri ile bu x sayısına çizelgede karşılık getirilen y değeri birbirinden farklıdır. Bu farklar aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir.

x	y	$ax + b$	$farklar$
1	3	$a + b$	$3 - a - b$
2	1	$2a + b$	$1 - 2a - b$
2	2	$2a + b$	$2 - 2a - b$
3	0	$3a + b$	$0 - 3a - b$

(2. çizelge)

"En iyi yaklaşık doğru"yu elde edebilmek için 2. çizelgede bulunan farkların karelerinin toplamının en küçük olmasını istiyoruz. Bu farkların karelerinin toplamına $F(a, b)$ diyelim.

$$F(a, b) = (3 - a - b)^2 + (1 - 2a - b)^2 + (2 - 2a - b)^2 + (-3a - b)^2$$

olur. Aradığımız doğruyu belirten a ve b sayıları, F fonksiyonunu minimum yapan sayılardır.

$$F_a(a, b) = 2(3 - a - b)(-1) + 2(1 - 2a - b)(-2) + 2(2 - 2a - b)(-2) + 2(-3a - b)(-3)$$
$$F_b(a, b) = 2(3 - a - b)(-1) + 2(1 - 2a - b)(-1) + 2(2 - 2a - b)(-1) + 2(-3a - b)(-1)$$

olduğundan $F_a(a, b) = 36a + 16b - 18$ ve $F_b(a, b) = 16a + 8b - 12$ bulunur.

$$\begin{aligned} 36a + 16b - 18 &= 0 \\ 16a + 8b - 12 &= 0 \end{aligned}$$

denklem sisteminden $a_0 = -1,5$, $b_0 = 4,5$ bulunur.

$$F_{aa}(a_0, b_0) = 42, \quad F_{ab}(a_0, b_0) = 16, \quad F_{bb}(a_0, b_0) = 8$$

olduğundan

$$F_{ab}^2(a_0, b_0) - F_{aa}(a_0, b_0) F_{bb}(a_0, b_0) = 16^2 - 36 \cdot 8 = -32 < 0 \quad \text{ve} \quad F_{aa}(a_0, b_0) > 0$$

olduğundan F fonksiyonu, (a_0, b_0) noktasında bir minimuma sahiptir.

Sonuç olarak aranılan doğrunun denklemi, $y = -1,5x + 4,5$ dir. $x = 2,5$ için $y = -1,5x + 4,5$ eşitliğinden $y = 0,75$ bulunur. □

4. Aşağıdaki çizelgede verilen x ve y değerleri için en küçük kareler doğrusunu bulunuz. $x = 25$ için y nin değerinin kaç olması beklenir?

x	y
0	10
5	22
10	31
15	46
20	51

(1. çizelge)

Çözüm: $y = ax + b$ biçiminde bir doğru arıyoruz. Bir x sayısına karşılık, $y = ax + b$ kuralından bulunan y değeri ile bu x sayısına çizelgede karşılık getirilen y değeri birbirinden farklıdır. Bu farklar aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir.

x	y	$ax + b$	$farklar$
0	10	$0 + b$	$10 - 0 - b$
5	22	$5a + b$	$22 - 5a - b$
10	31	$16a + b$	$31 - 10a - b$
15	46	$15a + b$	$46 - 15a - b$
20	51	$20a + b$	$51 - 20a - b$

(2. çizelge)

"En iyi yaklaşık doğru"yu elde edebilmek için 2. çizelgede bulunan farkların karelerinin toplamının en küçük olmasını istiyoruz. Bu farkların karelerinin toplamına $F(a,b)$ diyelim.

$$F(a,b) = (10-b)^2 + (22-5a-b)^2 + (31-10a-b)^2 + (46-15a-b)^2 + (51-20a-b)^2$$

olur. Aradığımız doğruyu belirten a ve b sayıları, F fonksiyonunu minimum yapan sayılardır.

$$\begin{aligned} F_a(a,b) &= 2(22-5a-b)(-5) + 2(31-10a-b)(-10) \\ &\quad +2(46-15a-b)(-15) + 2(51-20a-b)(-20) \\ F_b(a,b) &= 2(10-b)(-1) + 2(22-5a-b)(-1) + 2(31-10a-b)(-1) \\ &\quad +2(46-15a-b)(-1) + 2(51-20a-b)(-1) \end{aligned}$$

olduğundan $F_a(a,b) = 1500a + 100b - 4260$ ve $F_b(a,b) = 100a + 10b - 320$ bulunur.

$$\begin{aligned} 1500a + 100b - 4260 &= 0 \\ 100a + 10b - 320 &= 0 \end{aligned}$$

denklem sisteminden $a_0 = 2,12$, $b_0 = 10,8$ bulunur.

$$F_{aa}(a_0,b_0) = 1500,\ F_{ab}(a_0,b_0) = 100,\ \ F_{bb}(a_0,b_0) = 10$$

olduğundan

$$F_{ab}^2(a_0,b_0) - F_{aa}(a_0,b_0)\,F_{bb}(a_0,b_0) = 100^2 - 1500 \cdot 10 = -5000 < 0 \ \text{ ve } \ F_{aa}(a_0,b_0) > 0$$

olduğundan F fonksiyonu, (a_0, b_0) noktasında bir minimuma sahiptir.

Sonuç olarak aranılan doğrunun denklemi, $y = 2,12x+10,8$ dir. $x = 25$ için $y = 2,12x+10,8$ eşitliğinden $y = 63,8$ bulunur. □

5. Bir sınıftaki 10 öğrencinin ara sınav notları ortalaması ve genel sınav notları aşağıdaki çizelgedeki gibidir.

ara sınav (x_k)	49	53	67	71	74	78	83	85	91	99
genel sınav (y_k)	61	47	72	76	68	77	81	79	93	99

(1. çizelge)

Bu değerlerden yararlanarak öğrencilerin ara sınav notları ortalaması ile genel sınav notları arasında $y = ax + b$ biçimindeki bağlantıyı bulunuz.

Bu 10 öğrencinin bulunduğu sınıftaki bir öğrencinin ara sınav notlarının ortalaması 95 olsun. Bu öğrencinin genel sınav notunun kaç olması beklenir?

Çözüm: Genel olarak n tane $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ noktasından geçen en küçük kareler doğrusu arandığında a ve b sayılarını veren denklem sisteminin

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) a + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) b &= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \\ \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) a + nb &= \sum_{k=1}^{n} y_k \end{aligned} \tag{1}$$

sistemi olduğunu göstermiştik. Bu denklem sisteminin çözümü

$$\begin{aligned} a &= \frac{n\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)}{n\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2} \\ b &= \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right) - a\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)}{n} \end{aligned} \tag{2}$$

dır. Burada verilen noktalar için $n = 10$ dur. Ayrıca

$$\sum_{k=1}^{10} x_k^2 = 49^2 + 53^2 + 67^2 + 71^2 + 74^2 + 78^2 + 83^2 + 85^2 + 91^2 + 99^2 = 58496$$

$$\sum_{k=1}^{10} x_k = 49 + 53 + 67 + 71 + 74 + 78 + 83 + 85 + 91 + 99 = 750$$

$$\sum_{k=1}^{10} x_k y_k = 49{\cdot}61+53{\cdot}47+67{\cdot}72+71{\cdot}76+74{\cdot}68+78{\cdot}77+83{\cdot}81+85{\cdot}79+91{\cdot}93+99{\cdot}99 = 58440$$

$$\sum_{k=1}^{10} y_k = 61 + 47 + 72 + 76 + 68 + 77 + 81 + 79 + 93 + 99 = 753$$

dür. Yukarıdaki (2) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} a &= \frac{n\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)}{n\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2} = \frac{10 \cdot 58440 - 750 \cdot 753}{10 \cdot 58496 - 750^2} = 0,875 \\ b &= \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right) - a\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)}{n} = \frac{753 - 0,875 \cdot 750}{10} = 9,675 \end{aligned} \tag{2}$$

elde edilir. Sonuç olarak aranılan doğrunun denklemi, $y = 0,875x + 9,675$ dir. Bu doğruya, "en küçük kareler doğrusu" veya "çekilme (regression) doğrusu" adı verilmişti.

Bu 10 öğrencinin bulunduğu sınıftaki bir öğrencinin ara sınav notlarının ortalaması 95 olsun. Bu öğrencinin genel sınav notunun da $y = 0,875x + 9,675$ kuralına uyacağını varsayabiliriz. Bu durumda $y = 0,875 \cdot 95 + 9,675$ eşitliğinden $y = 92,8$ bulunur. Öyleyse bu öğrencinin genel sınav notunun yaklaşık olarak 93 olması beklenmelidir. □

6. Amerika birleşik devletlerinde (A.B.D) 1950 yılından başlayarak her on yılda bir ev ısıtmasında kullanılan sıvı yakıt (fuel oil) yüzdeleri aşağıdaki çizelgedeki gibidir.

yıllar	*yüzde*
1950	22, 1
1960	32, 4
1970	26
1980	18, 1
1990	13, 2
2000	9

(1. çizelge)

Bu değerlerden yararlanarak ev ısıtmasında kullanılan sıvı yakıt (fuel oil) yüzdesini yıllara bağlı olarak gösteren en küçük kareler doğrusunu bulunuz.

2010 yılında tüketilen sıvı yakıt (fuel oil) yüzdesinin kaç olması beklenir?

Çözüm: 1950 yılı ölçümün başladığı yıl olduğundan bu yıl için $x_1 = 0$ alalım. $x_1 = 0$ için $y_1 = 22,1$ demektir. Benzer biçimde $x_2 = 10$ için $y_2 = 32,4$ demektir. Böyle devam edilerek

aşağıdaki çizelge elde edilir.

x	y
0	22, 1
10	32, 4
20	26
30	18, 1
40	13, 2
50	9

Genel olarak n tane (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... , (x_n, y_n) noktasından geçen en küçük kareler doğrusu arandığında a ve b sayılarının

$$\begin{aligned} a &= \frac{n\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)}{n\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2} \\ b &= \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right) - a\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)}{n} \end{aligned} \qquad (1)$$

eşitlikleriyle belirli olduğunu göstermiştik. Burada verilen noktalar için $n = 6$ dır. Ayrıca

$$\sum_{k=1}^{6} x_k^2 = 0^2 + 10^2 + 20^2 + 30^2 + 40^2 + 50^2 = 5500$$

$$\sum_{k=1}^{6} x_k = 0 + 10 + 20 + 30 + 40 + 50 = 150$$

$$\sum_{k=1}^{6} x_k y_k = 0 \cdot 22, 1 + 10 \cdot 32, 4 + 20 \cdot 26 + 30 \cdot 18, 1 + 40 \cdot 13, 2 + 50 \cdot 9 = 2365$$

$$\sum_{k=1}^{6} y_k = 22, 1 + 32, 4 + 26 + 18, 1 + 13, 2 + 9 = 120, 8$$

dür. Yukarıdaki (1) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} a &= \frac{n\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)}{n\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2} = \frac{6 \cdot 2365 - 150 \cdot 120,8}{6 \cdot 5500 - 150^2} = -0,37 \\ b &= \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right) - a\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)}{n} = \frac{120,8 + 0,37 \cdot 150}{6} = 29,4 \end{aligned} \tag{2}$$

elde edilir. Sonuç olarak aranılan doğrunun denklemi, $y = -0,37x + 29,4$ dür.

2010 yılında $x = 60$ demektir. Buna göre 2010 yılında tüketilen sıvı yakıt (fuel oil) yüzdesi, $y = -0,37x+29,4$ eşitliğinde x yerine 60 konularak bulunan sayıdır. $y = -0,37 \cdot 60+29,4 = 7,2$ dir. □

7. Düzlemde, $(1,2)$, $(2,1)$, $(3,1)$, $(4,3)$ noktalarının en yakınından geçen parabol eğrisinin denklemini bulunuz.

Çözüm: Aradığımız parabolün denklemi, $y = ax^2 + bx + c$ biçimindedir. Buradaki a, b ve c sayıları,

$$F(a,b,c) = \sum_{k=1}^{n} \left(y_k - ax_k^2 - bx_k - c\right)^2$$

eşitliğiyle tanımlı F fonksiyonunun minimum olmasını sağlayan a, b ve c sayılarıdır. Bu soruda $n = 4$ tür.

$$F(a,b,c) = (2-a-b-c)^2 + (1-4a-2b-c)^2 + (1-9a-3b-c)^2 + (3-16a-4b-c)^2$$

olur. Kısmi türevler hesaplandığında

$$\begin{aligned} F_a(a,b,c) &= 2(2-a-b-c)(-1) + 2(1-4a-2b-c)(-4) \\ &\quad +2(1-9a-3b-c)(-9) + 2(3-16a-4b-c)(-16) \\ F_b(a,b,c) &= 2(2-a-b-c)(-1) + 2(1-4a-2b-c)(-2) \\ &\quad +2(1-9a-3b-c)(-3) + 2(3-16a-4b-c)(-4) \\ F_c(a,b,c) &= 2(2-a-b-c)(-1) + 2(1-4a-2b-c)(-1) \\ &\quad +2(1-9a-3b-c)(-1) + 2(3-16a-4b-c)(-1) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitliklerin sağ yanları hesaplanarak

$$\begin{aligned} F_a(a,b,c) &= 708a + 200b + 60c - 126 = 0 \\ F_b(a,b,c) &= 200a + 60b + 20c - 38 = 0 \\ F_c(a,b,c) &= 60a + 20b + 8c - 14 = 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

denklem sistemin bulunur. Bu denklem sistemi çözülerek $a = 0,75$, $b = -3,45$ ve $c = 4,75$ elde edilir. Buna göre aranılan parabolün denklemi $y = 0,75x^2 - 3,45x + 4,75$ dir. □

8. 1997 yılından başlayarak 2004 yılına kadar Çindeki motorlu araç üretimi sayıları çizelgedeki gibidir.

yıllar	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
üretim sayısı	1578	1628	1805	2009	2332	3251	4444	5071

(1. çizelge)

Bu çizelgedeki üretim sayılarında, 1000 araç bir birim olarak alınmıştır. 1997 yılında $x = 0$ alarak yıllar ve motorlu araç üretimi arasında $y = ax + b$ biçimindeki bağlantıyı bulunuz.

2010 yılında Çinin motorlu araç üretim sayısının kaç olması beklenir?

Çözüm: 1997 yılı için $x_1 = 0$ dır. $x_1 = 0$ için $y_1 = 1578$ demektir. Benzer biçimde $x_2 = 1$ için $y_2 = 1628$ demektir. Böyle devam edilerek aşağıdaki çizelge elde edilir.

yıllar (x_k)	0	1	2	3	4	5	6	7
üretim sayısı (y_k)	1578	1628	1805	2009	2332	3251	4444	5071

(2. çizelge)

Genel olarak n tane (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... , (x_n, y_n) noktasından geçen en küçük kareler doğrusu arandığında a ve b sayılarının

$$\begin{aligned} a &= \frac{n\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)}{n\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2} \\ b &= \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right) - a\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)}{n} \end{aligned} \qquad (1)$$

eşitlikleriyle belirli olduğunu göstermiştik. Burada verilen noktalar için $n = 8$ dır. Ayrıca

$$\sum_{k=1}^{8} x_k^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 = 140$$

$$\sum_{k=1}^{8} x_k = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$$

$$\sum_{k=1}^{8} x_k y_k = 0\cdot 1578+1\cdot 1628+2\cdot 1805+3\cdot 2009+4\cdot 2332+5\cdot 3251+6\cdot 4444+7\cdot 5071 = 99009$$

$$\sum_{k=1}^{8} y_k = 1578+1628+1805+2009+2332+3251+4444+5071 = 22118$$

dür. Yukarıdaki (1) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} a &= \frac{n\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right)}{n\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2} = \frac{8\cdot 99009 - 28\cdot 22118}{8\cdot 140 - 28^2} = 514,19 \\ b &= \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} y_k\right) - a\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)}{n} = \frac{22118 - 514,19\cdot 28}{8} = 965,1 \end{aligned} \tag{2}$$

elde edilir. Sonuç olarak aranılan doğrunun denklemi, $y = (514,2)\,x + 965,1$ dir.

2010 yılında $x = 13$ demektir. Buna göre 2010 yılında üretilen araç sayısı,

$$y = (514,2)\,x + 965,1$$

eşitliğinde x yerine 13 konularak bulunan sayıdır. $y = (514,2)\cdot 13 + 965,1 = 7649,7$ dir. Demek ki 2010 yılında üretilen araç sayısı 7649700 adettir. □